# ĐỊNH LÍ CON BƯỚM

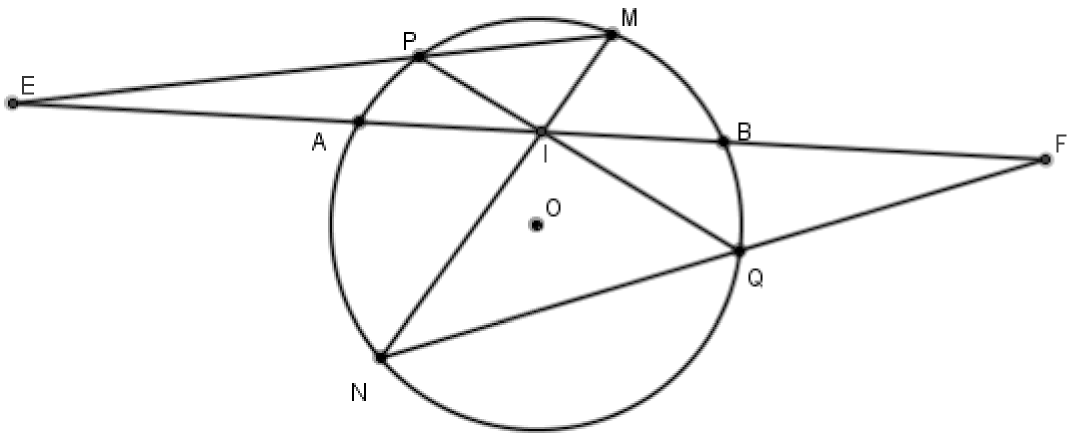
Hoàng Minh Quân - THPT Ngọc Tảo - Hà Nội

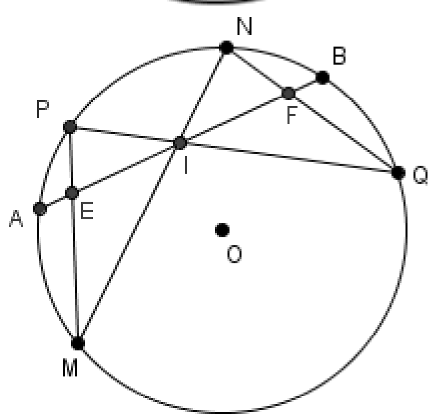
Định lí con bướm phát biểu về một bài toán đẹp có nhiều ứng dụng trong hình học phẳng. Bài viết sau đây sẽ khai thác một số ứng dụng của định lí con bướm trong các bài toán hay và thú vị , đa phần trong số đó là các bài thi toán của nhiều nước trên thế giới. Do thời gian và trình độ có hạn nên bài viết khó tránh khỏi thiếu sót. Mọi góp ý và bổ sung cho bài viết hoàn thiện hơn xin gửi về địa chỉ Hoangquan9@gmail.com .

*Hà Nội , tháng 7 năm 2012*

# I. NỘI DUNG ĐỊNH LÍ CON BƯỚM

**Định lí:** Cho đường tròn (O) với dây cung AB. Gọi I là trung điểm của AB, qua I dựng hai dây cung MN và PQ sao cho MP và NQ cắt AB lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng I là trung điểm của đoạn thẳng EF.

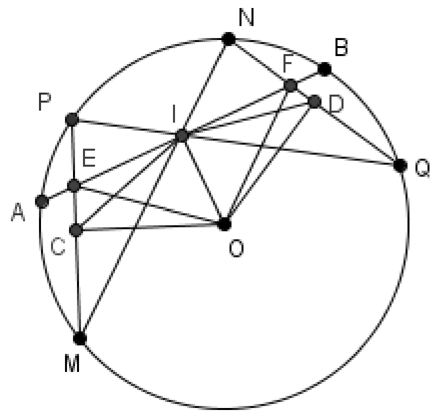



**<u>Chứng minh</u>**

Bài toán này có nhiều cách chứng minh, sau đây tôi sẽ trình bày những cách chứng minh  đơn giản, dễ hiểu và sơ cấp nhất đến với bạn đọc. Mỗi chứng minh lại là một con đường riêng, một vẻ đẹp riêng của môn hình học phẳng, mà ở đó những bạn yêu thích môn toán sẽ cảm nhận từ từ vẻ đẹp nghệ thuật, đan xen những xử lí tinh tế hình học trong đó.

**<u>Lời giải 1:</u>**



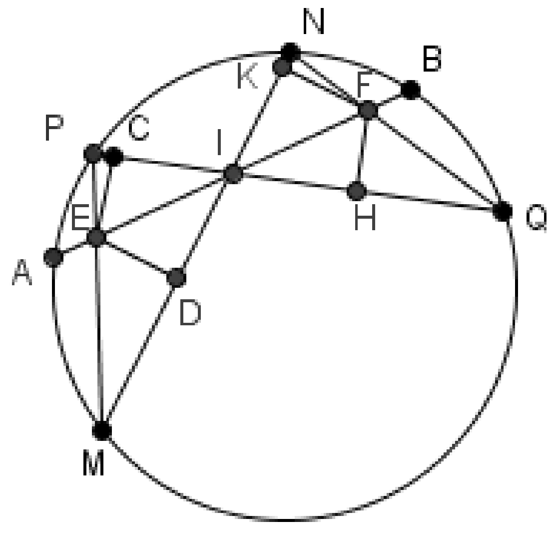

Vì I là trung điểm AB nên ta có: $OI \perp AB$.

Gọi C, D lần lượt là trung điểm của MP, NQ ta có: $OC \perp MP, OD \perp NQ$. Vậy các tứ giác $IOCE, IODF$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn .Do đó ta có: $\widehat{IOE} = \widehat{ICE}$ và $\widehat{IOF} = \widehat{IDF}$.(1)

Mặt khác dễ thấy $\Delta IMP$ đồng dạng $\Delta IQN$ (g.g) và $IC, ID$ là hai đường trung tuyến tương ứng nên ta có: $\dfrac{IC}{ID} = \dfrac{IP}{IN} = \dfrac{PM}{NQ} = \dfrac{CP}{DN}$. Do đó $\Delta ICP$ đồng dạng $\Delta IDN$ nên $\widehat{ICE} = \widehat{IDF}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $\widehat{IOE} = \widehat{IOF} \Rightarrow \Delta OEF$ cân tại O, từ đó ta có I là trung điểm EF. (Đpcm)

**<u>Lời giải 2:</u>**



Gọi C,D lần lượt là hình chiếu vuông góc của E lên IP,IM và K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của F lên IM, IQ.

Ta có:

$\Delta IED$ đồng dạng $\Delta IFK$ nên $\frac{IE}{IF}=\frac{ED}{FK}$ (1)

$\Delta IEC$ đồng dạng $\Delta IFH$ nên $\frac{IE}{IF}=\frac{EC}{FH}$ (2)

$\Delta PEC$ đồng dạng $\Delta NFK$ nên $\frac{PE}{NF}=\frac{EC}{FK}$ (3)

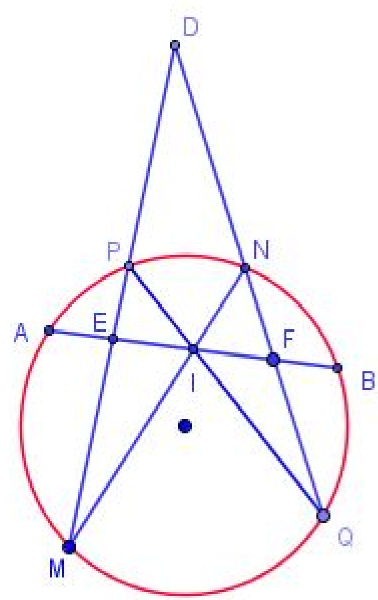
$\Delta MED$ đồng dạng $\Delta QFH$ nên $\frac{ME}{QF}=\frac{ED}{FH}$ (4)

Từ (1), (2), (3) và (4), chúng ta có: $\left(\frac{IE}{IF}\right)^2=\frac{ED}{FK}.\frac{EC}{FH}=\frac{ME}{NF}.\frac{PE}{QF}=\frac{AE}{AF}.\frac{BE}{BF}$

Mặt khác: $\frac{AE}{AF}.\frac{BE}{BF}=\frac{(AI-EI)(BI+IE)}{(AI+IF)(IB-IF)}=\frac{AI^2-EI^2}{AI^2-IF^2}$

Vậy $\left(\frac{IE}{IF}\right)^2=\frac{AI^2-EI^2}{AI^2-IF^2}=\frac{AI^2}{AI^2}=1$. Do đó $IE=IF$ (Đpcm).

**<u>Lời giải 3</u>**



Trường hợp MP và NQ song song là trường hợp tầm thường nên ở đây chúng ta xét MP và NQ giao nhau.

Gọi D là giao điểm của MP và NQ .

Xét tam giác EFD. Theo định lí Menelauyt ta có: $\frac{\overline{IF}}{\overline{IE}}.\frac{\overline{ME}}{\overline{MD}}.\frac{\overline{ND}}{\overline{NF}}=1;\frac{\overline{IF}}{\overline{IE}}.\frac{\overline{PE}}{\overline{PD}}.\frac{\overline{QD}}{\overline{QF}}=1$

$$\Rightarrow\frac{IF^2.\overline{ME}.\overline{PE}.\overline{ND}.\overline{QD}}{IE^2.\overline{MD}.\overline{NF}.\overline{PD}.\overline{QF}}=1$$

Vì DN.DQ = DP.DM nên ta có:

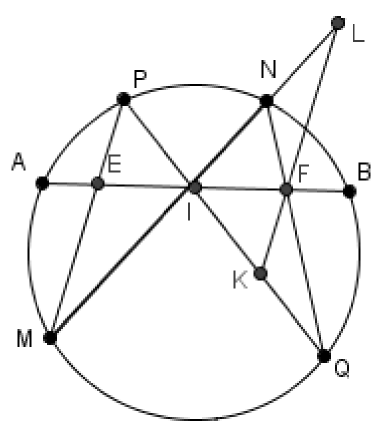
$$\Rightarrow\frac{IF^2.\overline{ME}.\overline{PE}}{IE^2.\overline{NF}.\overline{QF}}=1\Rightarrow\frac{IF^2}{IE^2}=\frac{\overline{NF}.\overline{QF}}{\overline{ME}.\overline{PE}}$$

Mặt khác : NF.QF = AF.BF và ME.PE=EA.EB nên ta có:

$$\frac{IF^2}{IE^2}=\frac{\overline{AF}.\overline{BF}}{\overline{EA}.\overline{EB}}=\frac{(\overline{AI}+\overline{IF})(\overline{AI}-\overline{IF})}{(\overline{AI}-\overline{IE})(\overline{AI}+\overline{IE})}=\frac{AI^2-IF^2}{AI^2-IE^2}=1$$

Vậy IE = IF (Đpcm)

**<u>Lời giải 4:</u>**




Từ F kẻ đường thẳng d song song song với MP, cắt MN ở L và cắt PQ ở K. Ta có:

$\widehat{FLN}=\widehat{IME}=\widehat{FQK}$.

Hai tam giác LNF và tam giác QKF đồng dạng (g.g) nên ta có: $\frac{LF}{FN}=\frac{FQ}{FK}$. Vì vậy

$$LF.FK=FN.FQ=FA.FB=(AI+IF)(BI-IF)=AI^2-IF^2$$

Tương tự ta có: $EP.EM=AI^2-IE^2$

Ta có tam giác IEP và tam giác IFK đồng dạng (g.g) nên ta có: $\frac{FK}{FI}=\frac{EP}{EI}$ (1)

Ta có tam giác IFL và tam giác IEM đồng dạng (g.g) nên ta có: $\frac{FL}{FI}=\frac{EM}{EI}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{FK.FL}{FI^2}=\frac{EP.EM}{EI^2}$

Mà $LF.FK = AI^2 - IF^2, EP.EM = AI^2 - IE^2$

nên $\frac{FK.FL}{FI^2}=\frac{EP.EM}{EI^2} \Leftrightarrow \frac{AI^2-IF^2}{FI^2}=\frac{AI^2-IE^2}{EI^2} \Leftrightarrow \frac{AI^2}{FI^2}=\frac{AI^2}{EI^2} \Leftrightarrow IE = IF.$ (Đpcm).

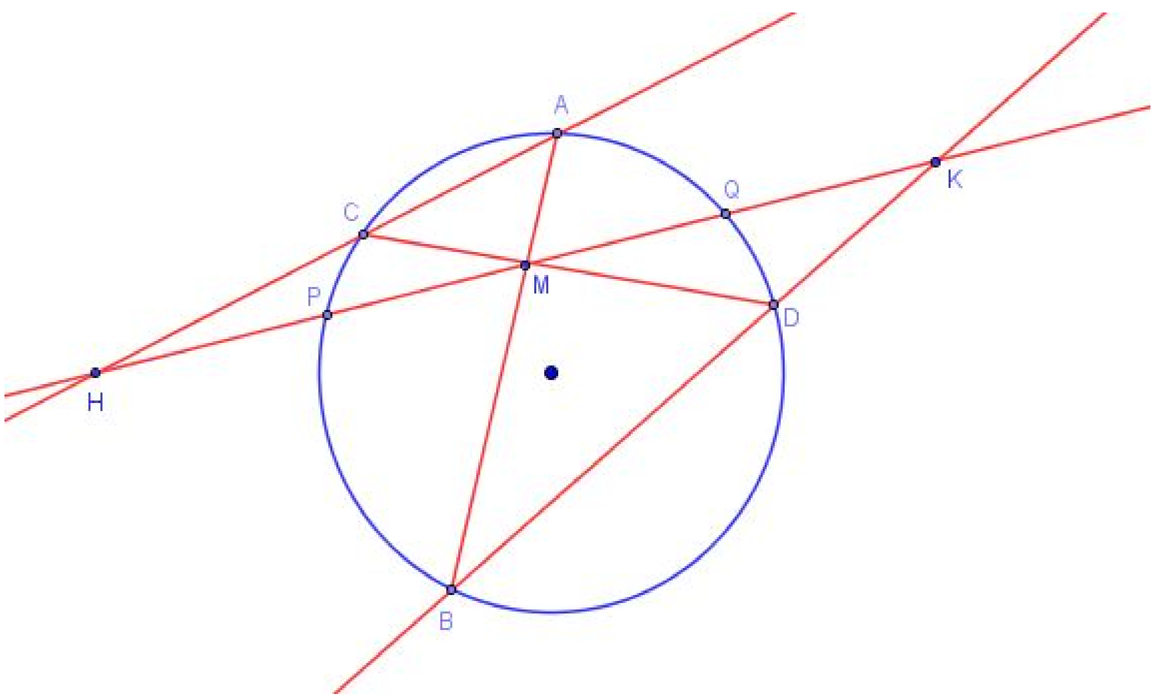
## II. ỨNG DỤNG ĐỊNH LÍ CON BƯỚM GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH.

**Ví dụ 1**

Cho đường tròn (C) có M là trung điểm của dây cung PQ . Gọi AB, CD là hai dây cung qua điểm M. Gọi H, K lần lượt là giao điểm của PQ với AC và BD.

Chứng minh rằng: $\frac{HA.HC}{HM^2}=\frac{KB.KD}{KM^2}$

**Lời giải.**




Theo giả thiết MP = MQ. Áp dụng *định lí con bướm* ta có MH = MK

Ta có HA.HC = HP.HQ = KQ.KP = KB.KD.

Do đó $\frac{HA.HC}{HM^2} = \frac{KB.KD}{KM^2}$ (vì MH = MK và HA.HC = KB.KD.) (Đpcm)

**Ví dụ 2**

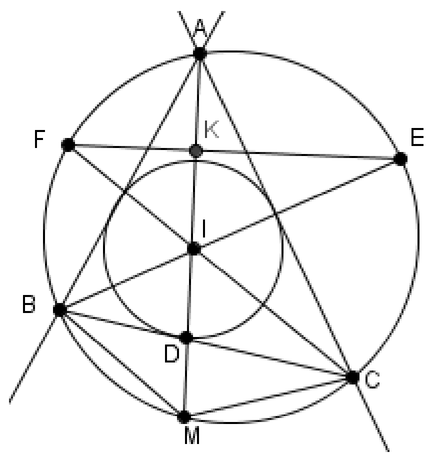
Cho $\Delta ABC$ nội tiếp đường tròn (O), I là tâm đường tròn nội tiếp. Dường thẳng BI, CI cắt đường tròn (O) tại E, F. Gọi K, D lần lượt là giao điểm của AI với EF và BC. Biết

AB+ AC=2BC . Chứng minh rằng IK=ID.

**Ý tưởng:** Gọi giao điểm của AI và đường tròn (O) là điểm M khác A.

Phân tích đề bài chúng ta thấy $CF \cap AM = I, BE \cap AM = I$ . Do đó để chứng minh IK = ID ta sẽ chứng minh IA = IM (Từ định lí con bướm chúng ta có đpcm)

**Lời giải :**




Gọi giao điểm của AI và đường tròn (O) là điểm M khác A.

Xét tam giác MAC và tam giác BAD có: $\widehat{AMC} = \widehat{ABD}, \widehat{BAD} = \widehat{CAM}$

nên đồng dạng . Từ đó ta có: $\frac{MC}{MA} = \frac{BD}{BA} = \frac{ID}{IA} = \frac{CD}{CA} = \frac{BD+CD}{BA+CA} = \frac{BC}{2BC} = \frac{1}{2}$

Xét tam giác MIC có: $\widehat{MIC} = \widehat{ICM}$ nên là tam giác cân tại M. Do đó $MI = MC$ và

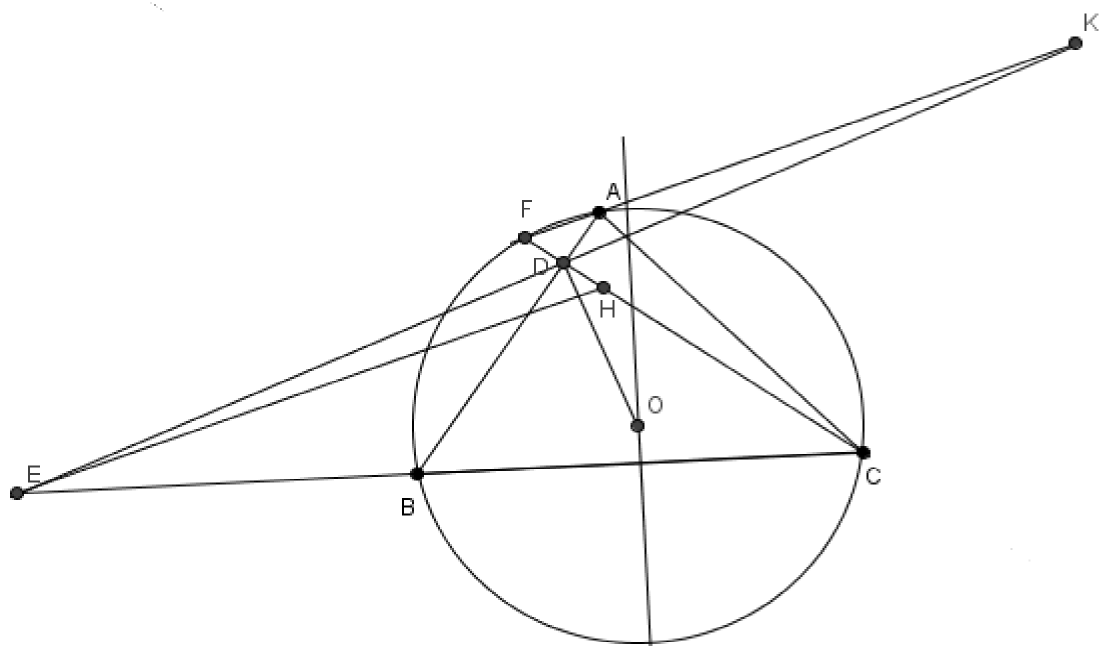
$MI = \frac{1}{2}MA \Rightarrow MI = IA$. *Theo định lí con bướm* thì IK=ID. (Đpcm).

**<u>Ví dụ 3</u>: ( *Mongolian TST 2008*)**

Cho tam giác nhọn ABC có CD là đường cao, H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Một đường thẳng đi qua điểm D , vuông góc với OD và cắt BC tại E. Chứng minh rằng: $\widehat{DHE} = \widehat{ABC}$.

**<u>Lời giải</u>**

Phân tích bài toán chúng ta thấy đường thẳng đi qua D và vuông góc với OD thì dễ thấy D chính là trung điểm của dây cung đường tròn (O) qua D. Từ đó ta thấy xuất hiện mô hình của định lí con bướm và khai thác điều này để chứng minh bài toán. Sau đây là lời giải cho bài toán.




Gọi F là giao điểm của đường tròn (O) cắt CD, K là giao điểm của AF và DE . Áp dụng *định lí Con Bướm* với điểm $D = CF \cap AB \cap EK.$ và $OD \perp EK$, chúng ta có: $\begin{cases} DE = DK \\ DH = DF \end{cases} \Rightarrow EH \parallel FA \Rightarrow \widehat{DHE} = \widehat{DFA} = \widehat{CBA}.$ (Đpcm).

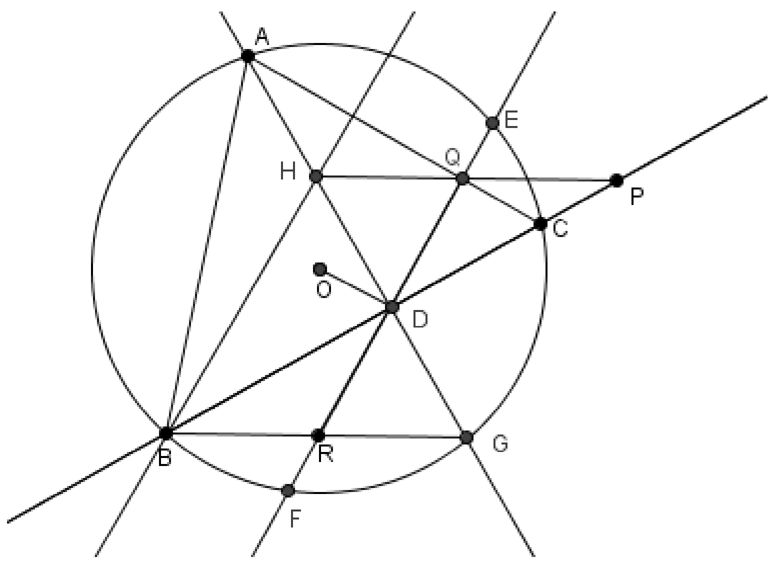
**<u>Ví dụ 4</u>** ***( Singapore 2011)***

Cho tam giác ABC nhọn, không cân, O , H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác ABC, $AB > AC$. Q là điểm trên AC , kéo dài HQ cắt BC ở P sao cho $DP = DB$ với D là chân đường cao hạ từ đỉnh A tới BC. Chứng minh rằng $\widehat{ODQ} = 90^0$.

**<u>Lời giải</u>**

Phân tích bài toán: Để chứng minh góc $\widehat{ODQ} = 90^0$, chúng ta sẽ chứng minh $OD \perp DQ$. Điều đó làm nảy sinh ý tưởng chứng minh OD vuông góc với dây cung qua D hay nói cách khác chúng ta chứng minh D là trung điểm của dây cung đó. Cùng với giả thiết DP=DB chúng ta nghĩ tới việc xây dựng mô hình bài toán con bướm để áp dụng.

*<u>Lời giải cho bài toán.</u>*



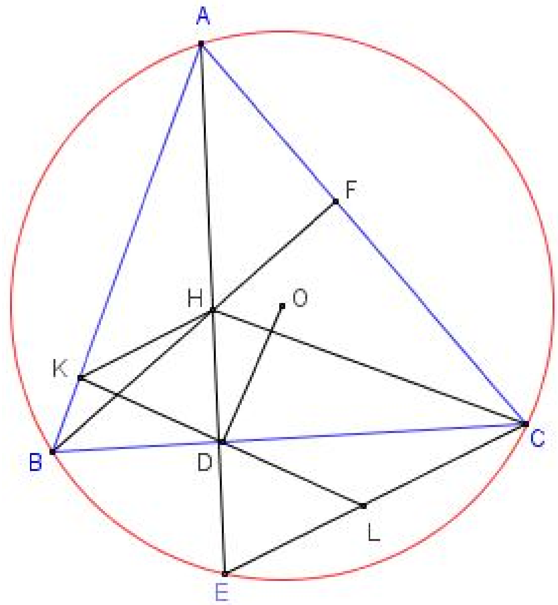

Gọi G là điểm đối xứng của H qua BC, khi đó G thuộc đường tròn (O) . Gọi R là giao điểm của QD và BG. Theo giả thiết ta có: DP = DB mà DH=DG nên $\overline{HQP} \parallel \overline{BRG}$.

Do đó $\Delta HDQ = \Delta GDR(g.c.g) \Rightarrow DQ = DR.$ Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường tròn(O) với QR .Theo *định lí con bướm* chúng ta có DE=DF. Do đó $OD \perp EF$ hay $\widehat{ODQ} = 90^0$.

**Ví dụ 5**

Cho tam giác nhọn ABC có AD là đường cao, O và H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác ABC. Kẻ đường thẳng qua D và vuông góc với OD , cắt AB ở K. Chứng minh rằng $\widehat{DHK}+\widehat{AHC}=180^0$.

**Lời giải**




Gọi E là giao điểm thứ hai của AD với đường tròn (O) . Ta dễ chỉ ra rằng DH = DE và do đó tam giác CHE cân đỉnh C nên $\widehat{CHE}=\widehat{CEH}=\widehat{CEA}$. (1)

Gọi L là giao điểm của KD và EC. Ta có AE, BC, KL đồng quy tại D, có DH = DE, $OD\perp KL$. *Theo định lí con bướm* thì DK = DL. Do đó $\Delta DEL=\Delta DHK(c.g.c)$.

Suy ra $\widehat{DHK}=\widehat{DEL}$. Vậy $\widehat{DHK}+\widehat{AHC}=\widehat{DEL}+\widehat{AHC}=\widehat{AEC}+\widehat{AHC}$ (2)

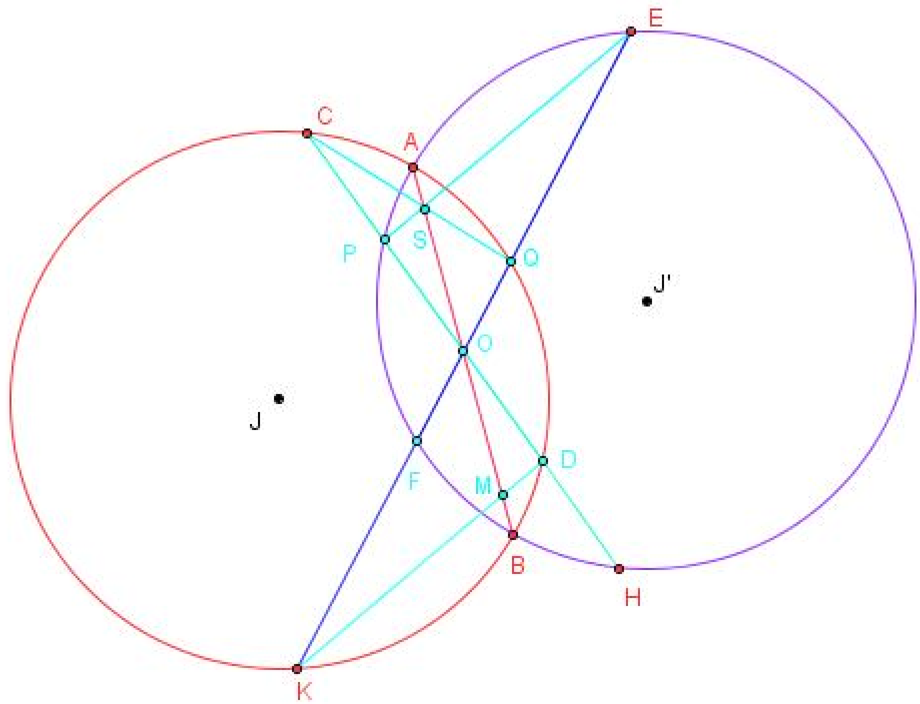
Từ (1) và (2) ta có: $\widehat{DHK}+\widehat{AHC}=\widehat{AEC}+\widehat{AHC}=\widehat{CHE}+\widehat{AHC}=180^0$

**Ví dụ 6** ***(MOP 1998)***

Cho hai đường tròn (C) và (C’) có cùng bán kính, cắt nhau tại hai điểm A, B. Gọi O là trung điểm AB. Dây cung CD của đường tròn (C) qua điểm O, Gọi P là giao điểm của đoạn thẳng CD cắt (C’). EF là dây cung (C’) qua O và đoạn thẳng EF cắt (C’) tại Q. Chứng minh rằng: AB, CQ, EP đồng quy.

**Lời giải**

*Phân tích:* Bài toán này với việc giả thiết cho O là trung điểm AB , mô hình về bài toán con bướm dễ được xây dựng. Chúng ta gọi giao điểm của CQ, EP với AB lần lượt là S, S' . Công việc của chúng là chứng minh S trùng S' . KHi đó bài toán được chứng minh.




Gọi H là giao điểm thứ hai của CD và (C'), K là giao điểm thứ hai của EF và (C) . Gọi S, S' lần lượt là giao điểm của CQ, EP với AB. Gọi M là giao điểm của KD và AB.

Trong đường tròn (C) tâm J từ giả thiết O là trung điểm AB, theo *định lí con bướm* với 4 điểm C, Q, D, K ta có O là trung điểm MS.

Mặt khác vì hai đường tròn (C) và (C') có cùng bán kính nên O là trung điểm AB thì O cũng là trùng điểm của PD,EK nên tứ giác PDEK là hình bình hành.

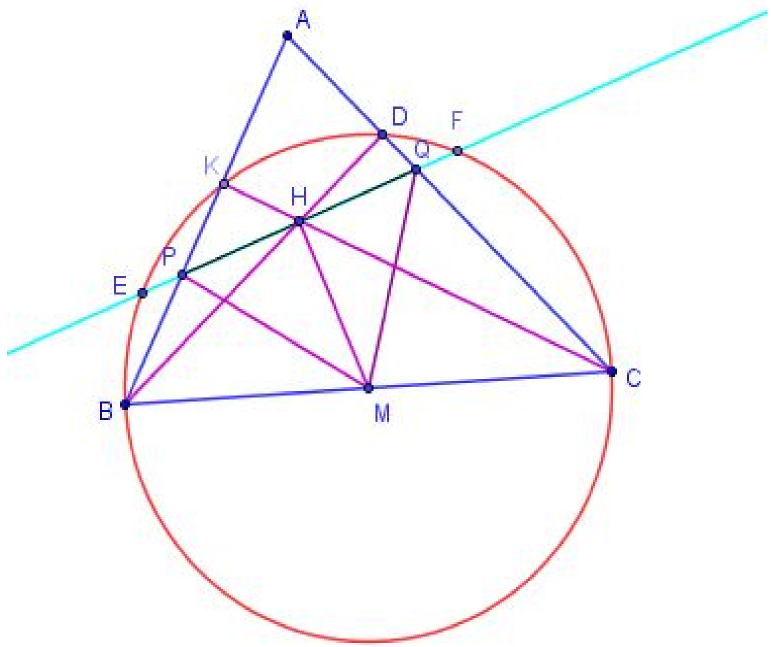
Từ đó ta có $\Delta KOM = \Delta EOS'(g.c.g)$ . Suy ra OM=OS' hay O là trung điểm MS'.

Vậy S trùng S'. Do đó AB, CQ, EP đồng quy tại S. (Đpcm).

**<u>Ví dụ 7</u>***(Moldova TST 2010,)*

Cho tam giác nhọn ABC có H là trực tâm và M là trung điểm BC . Kẻ đường thẳng qua H vuông góc với HM và cắt AB, AC lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng: MP = MQ.

**<u>Lời giải</u>**



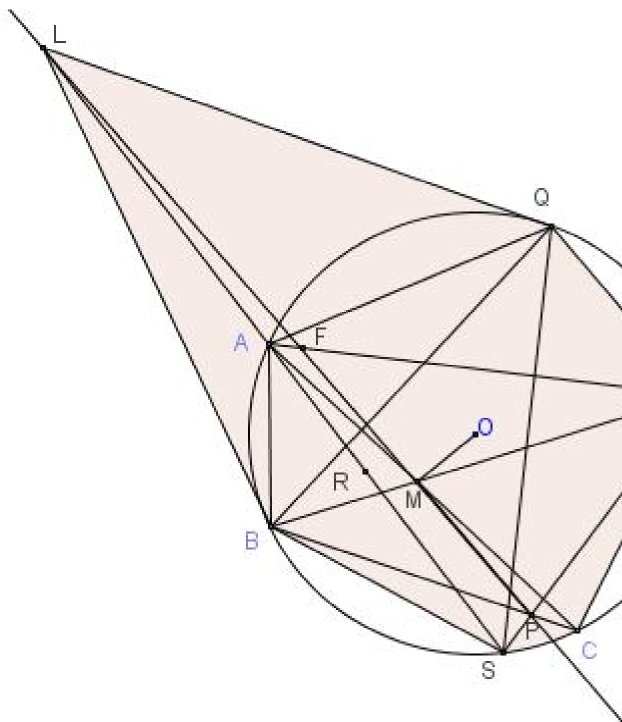

Gọi D, K lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh B, C xuống AC, AB. Ta có tứ giác BCDK nội tiếp đường tròn (C) tâm M, bán kính BC. Kéo dài PQ cắt đường tròn (C) tại hai điểm E, F. Vì MH vuông góc EF tại H nên H là trung điểm EF.

Ta có: $CK \cap \mathrm{EF} = H, BD \cap \mathrm{EF} = H, BK \cap \mathrm{EF} = P, CD \cap \mathrm{EF} = Q$ mà H là trung điểm EF nên theo *định lí con bướm* ta có: HP = HQ. vậy tam giác MPQ cân đỉnh M (Vì NH vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến) nên MP = MQ. (Đpcm)

**<u>Ví dụ 8</u>**

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M là giao điểm của AC và BD và P là điểm trên cạnh BC thỏa mãn PM vuông góc MO . Gọi S là giao điểm thứ hai của DP và đường tròn (O) và Q là điểm thuộc đường tròn (O) sao cho DQ vuông góc OM . Gọi R là giao điểm hai đường phân giác trong góc ABS và góc AQS . Các tiếp tuyến tại B và tại Q của đường tròn (O) cắt nhau tại L . Chứng minh rằng A, R, S, L thẳng hàng.

**Giải**




Gọi F là giao điểm của PM và AD. Theo *định lí con bướm* ta có M là trung điểm của PF Ta có: $DQ \perp OM, PF \perp OM$ nên $DQ \parallel PF$. Ta có D(PFMQ)= - 1.

Lại có LB, LQ là hai tiếp tuyến của đường tròn tại B, Q Do D(PFMQ)= -1 nên suy ra QABS là tứ giác điều hòa, từ đó suy ra LB, LQ và AS đồng quy hay L, A, S thẳng hàng.

Ta có $\widehat{ADB} = \widehat{AQB}, \widehat{BDS} = \widehat{BQS}$ và $\widehat{SDQ} = \widehat{SQL}$. Do đó $Q(S, A, B, L) \sim D(S, A, B, Q)$ điều hòa. Từ $BA.QS = QA.BS$ ta có $\frac{BA}{BS} = \frac{QA}{QS}$

theo tính chất đường phân giác trong thì các phân giác trong của các góc $\widehat{ABS} = \widehat{QAS}$ cắt nhau tại 1 điểm trên SA vậy R nằm trên SA. Do đó ta có L,R,S,A thẳng hàng.

*Sau đây là ví dụ nêu một ứng dụng đặc sắc và khá mới của định lí con bướm .* Một bài do bạn ***Trần Bảo Trung, A1K40 Chuyên Phan Bội Châu*** *sáng tác và là bài mở rộng của kì thi* ***IMO 2009****.*

**<u>Ví dụ 9</u>** (***Trần Bảo Trung***)

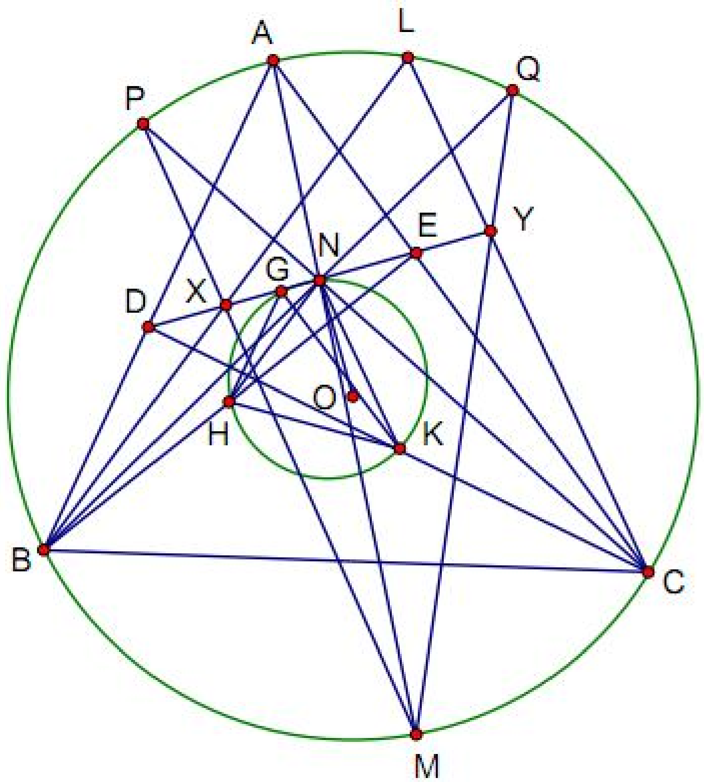
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và M là điểm nằm trong tam giác đó. Giả sử AM, BM, CM cắt BC, CA, AB lần lượt tại $A_1, B_1, C_1$. Gọi $A_2, B_2, C_2$ theo thứ tự là trung điểm của $AA_1, BB_1, CC_1$ ; $X, Y, Z$ tương ứng là hình chiếu của O lên $FE, ED, DF$. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $\Delta XB_2C_2, \Delta YC_2A_2, \Delta ZA_2B_2$ cùng đi qua một điểm.

**Giải**

Trước hết chúng ta chứng minh bổ đề sau.

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường thẳng d bất kì cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại D, E Giả sử H, K, G lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BE, CD, DE. N là hình chiếu vuông góc của O lên DE  Chứng minh  bốn điểm H, K, G , N cùng thuộc một đường tròn.

Bây giờ chúng ta chứng minh bổ đề



Gọi các giao điểm của AN, CN, BN với đường tròn (O) theo thứ tự là M, P, Q và X, Y lần lượt là giao điểm của đường thẳng DE với MP, MQ . Áp dụng định lí đảo Pascal cho ba điểm thẳng hàng X, N, Y chúng ta có giao điểm L của BX và CY nằm trên đường tròn (O) . Theo giả thiết $ON \perp XE$ áp dụng *định lí con bướm* cho bốn điểm A, P, M, C ta có N là trung điểm XE. Do đó trong tam giác EBX theo định lí đường trung bình chúng ta có $HN // BX$

Tương tự chúng ta có $KN // CY$

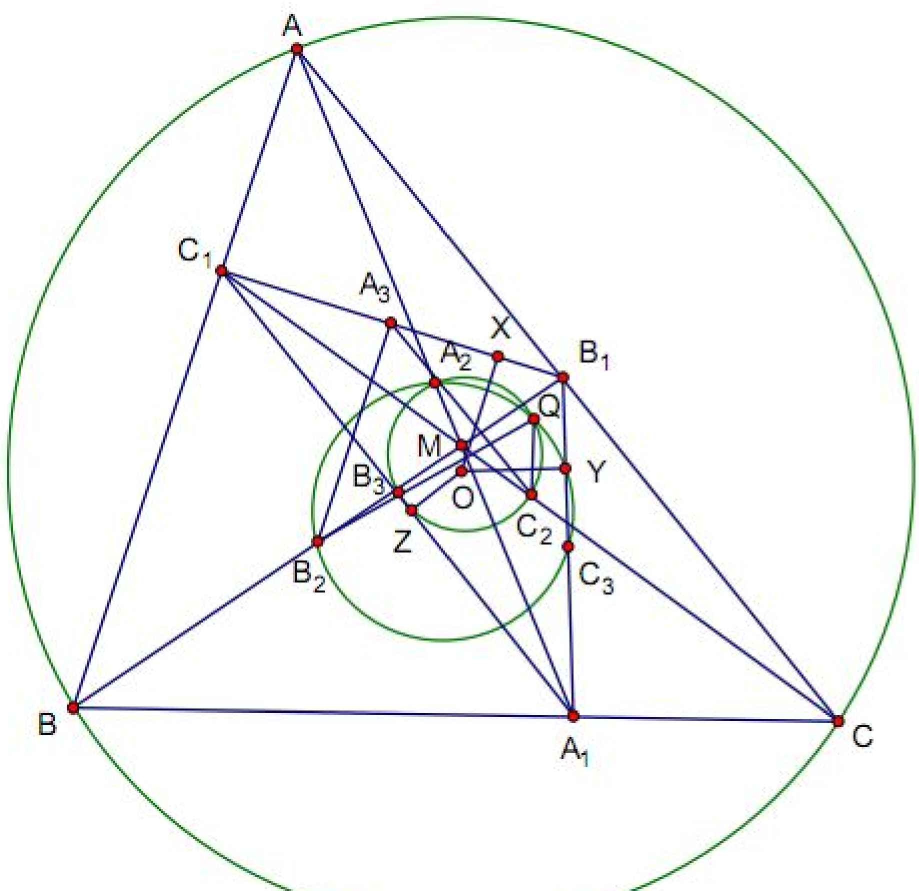
Vì vậy :

$$(NH, NK) \equiv (BX, CY) \bmod \pi \equiv (LB, LC) \bmod \pi \equiv (AB, AC) \bmod \pi (DoL \in (O))$$

$$\equiv (GH, GK) \bmod \pi \text{ Do } GH // AB, GK // AC$$

Vậy N, H, K, G đồng viên. Bổ đè được chứng minh.

Bây giờ trở lại bài toán ban đầu.



Gọi $A_3, B_3, C_3$ theo thứ tự là trung điểm của $B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1$ . Áp dụng bổ đề trên ta có các bộ bốn điểm sau đồng viên $(X, B_2, C_2, A_3), (Y, C_2, A_2, B_3), (Z, A_2, B_2, C_3)$ . Do đó bài toán được chứng minh nếu chúng ta chuwgs minh được ba đường tròn ngoại tiêp các tam giác $\Delta A_3B_2C_2, \Delta B_3C_2A_2, \Delta C_3A_2B_2$ . Thật vậy gọi Q là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_3B_2C_2, \Delta B_3C_2A_2$ . Chúng ta có:

$$
\begin{aligned}
(QB_2, QC_2) &\equiv (QB_2, QA_2) + (QA_2, QC_2) \bmod \pi \\
&\equiv (C_3B_2, C_3A_2) + (B_3A_2, B_3C_2) \bmod \pi \\
&\equiv (CB, CA) + (BA, BC) \bmod \pi \\
&\equiv (AB, AC) \bmod \pi \\
&\equiv (A_3B_2, A_3C_2) \bmod \pi
\end{aligned}
$$

Vậy $Q, A_3, B_2, C_2$ đồng viên. Ta có đpcm.

Như vậy thông qua 9 ví dụ chọn lọc trên chắc hẳn bạn đọc cũng đã cảm nhận được vẻ đẹp và các ứng dụng của định lí con bướm trong việc giải quyết các bài toán hình học phẳng.

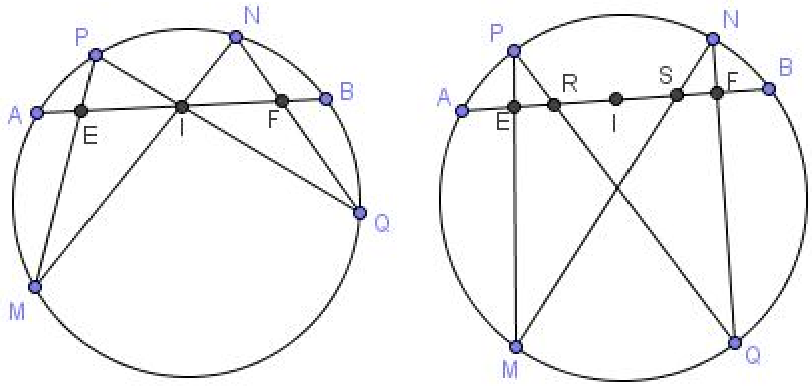
## III. MỞ RỘNG VÀ TỔNG QUÁT BÀI TOÁN CON BƯỚM

**Mở rộng:**

Trở lại định lí con bướm với phát biểu thường gặp

**Định lí:** *Cho đường tròn (O) với dây cung AB. Gọi I là trung điểm của AB, qua I dựng hai dây cung* MN *và* PQ *sao cho* MP *và* NQ *cắt AB lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng I là trung điểm của đoạn thẳng EF.*

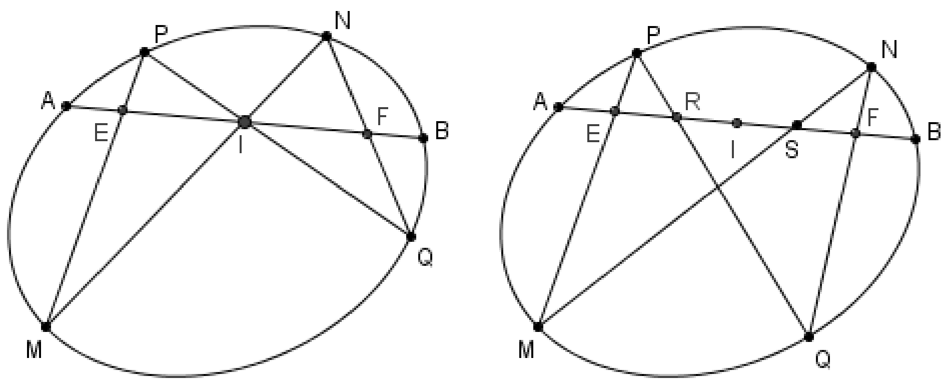
Theo lẽ thường là như vậy nhưng ở đây chúng ta đặt câu hỏi nếu như vẫn giả thiết trên nhưng hai dây cung MN, PQ không đi qua trung điểm I của AB mà thay vào đó MN, PQ lần lượt cắt AB ở S và R sao cho IR=IS thì chúng ta cũng có IE=IF. Minh họa bằng hình vẽ sau: (Việc chứng minh xin dành cho bạn đọc tìm tòi)




**Tổng quát:**

Chúng ta thấy rằng định lí con bướm trên phát biểu và đúng cho đường tròn, nhưng đường tròn là trường hợp đặc biệt của đường Elip và xa hơn nữa là đường conic. Vậy đối với đường Conic định lí con bướm có còn đúng không? Câu trả lời là có: Mời bạn đọc theo dõi tiếp *định lí phát biểu tổng quát* như sau:

__Định lí__: ***Giả sử các đường Conic (Elip, parabol, hypebol ) cùng đi qua 4 điểm M, N, P, Q mà ba trong bốn điểm đó không thẳng hàng . Gọi E,F lần lượt là giao điểm của AB với MP, NQ và R, S lần lượt là giao điểm của AB với PQ, MN. Khi đó nếu I A = IB và IR=IS thì IE=IF***




Việc chứng minh định lí này bạn đọc có thể dựa vào hai bổ đè sau.

**Bổ đề 1:** Cho đường Conic có phương trình $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey++f=0$ có dây cung AB . Khi đó một điểm M nằm giữa đoạn AB là trung điểm cảu AB khi và chỉ khi hệ số của x băng 0 hay $d=0$ .

**Bổ đề 2:** Với ba đường conic khác nhau cùng đi qua 4 điểm phân biệt mà ba trong bốn điểm đó không thẳng hàng thì mỗi conic đều là kết hợp tuyến tính của hai conic khác.

Để củng cố thêm việc gải toán cũng như thấy được nhiều thú vị về về định lí con bướm mời các bạn thực hành một số bài tập tự luyện sau.

## IV. MỘT SỐ BÀI TOÁN TỰ LUYỆN

**Bài tập 1**

Cho tam giác ABC và đường tròn nội tiếp C(I) , đường tròn ngoại tiếp C(O). Đường tròn C(I) tiếp xúc với cạnh BC ở D. Hai điểm M, S lần lượt là giao điểm của đường tròn C(O) với AI, AO. Trên đường thẳng DM lấy điểm X và trên đường thẳng AO lấy điểm Y sao cho I thuộc XY . Chứng minh rằng: $\mathrm{IX} = IY \Leftrightarrow OI \perp XY$.

**Bài tập 2**

Cho tam giác $ABC$ với $M$ là trung điểm $BC$. Giả sử $AM$ cắt đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$ tại $K$, $L$. Các đường thẳng song song với $BC$ qua $K$, $L$ cắt đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$ lần lượt tại $X$, $Y$. $AX$ cắt $BC$ tại $P$, $AY$ cắt đường tròn $(ABC)$ tại $D$. $DM$ cắt $(ABC)$ tại $E$. $AM$ cắt $(ABC)$ tại $F$. Chứng minh $F$, $P$, $E$ thẳng hàng.

**Bài tập 3**

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường chéo AC, BD cắt nhau tại I khác O. Qua I kẻ đường thẳng vuông góc với OI cắt AB, CD lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng AB=CD khi và chỉ khi BM=CN.

Sau đây mời các bạn đi đến một số kết quả mở rộng về bài toán con bướm và mời bạn đọc khai thác thêm nhiều tính chất khác của bài toán con bướm.

## V. MỘT SỐ KẾT QUẢ MỞ RỘNG

**Bài tập 1**

Cho tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi d là đường thẳng bất kì đi qua đường tròn tâm O với P là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng d. Đường thẳng d cắt các cạnh BC, CA, AB tại các điểm X, Y, Z. Gọi X', Y',Z' lần lượt là các điểm đối xứng với X, Y, Z qua P. Chứng minh rằng AX', BY',CZ' đồng quy tại một điểm nằm trên đường tròn (O).

**Bài tập 2**

Cho tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi d là đường thẳng bất kì đi qua đường tròn tâm O với P là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng d. Đường thẳng d cắt các cạnh BC, CA, AB tại các điểm X, Y, Z. Gọi W là giao điểm của đường thẳng d và tiếp tuyến của đường tròn (O) kẻ từ A. Chứng minh rằng P là trung điểm của YZ khi và chỉ khi P là trung điểm của XW.

**Bài tập 3**. ***(Định lí mạnh về bài toán con bướm)***

Cho bốn điểm A, B, C, D nằm trên đường trong tâm O. Gọi P là giao điểm của AC và BD . Một đường thẳng d tùy ý đi qua P sao cho P là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng d Gọi X là giao điểm của d và AB, Z là giao điểm của d và CD. Chứng minh P là trung điểm XZ.

## V. LỜI KẾT

Thông qua các trao đổi trên chúng ta có thể thấy rằng định lí con bướm là một định lí hay có nhiều ứng dụng đẹp và đặc sắc. Chuyên đề trên đã giới thiệu một số ứng dụng chọn lọc giúp bạn đọc thêm yêu thích định lí con bướm và khám phá tìm tòi thêm nhiều phát hiện mới. Chuyên đề cũng đã nêu một số mở rộng của bài toán con bướm cũng như tổng quát hóa định lí.

Định lí con bướm còn rất nhiều vẻ đẹp và ứng dụng nữa nhưng do thời gian và trình độ có hạn tác giả chưa khai thác được hết mong bạn đọc có thể khai thác tìm tòi thêm nhiều kết quả mới phục vụ cho việc học tập và yêu thích bộ môn hình học phẳng.

***Để hoàn thành chuyên đề này  tác giả xin cảm ơn hai bạn Trần Bảo Trung , A1K40, Chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An  và bạn Ong Thế Phương, chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai đã đọc bản thảo và cho nhiều nhận xét quý giá giúp chuyên đề hoàn thiện hơn.***

## VI. TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Sách bài tập hình học 10 nâng cao, NXB Giáo Dục Việt Nam.

[2] Nguyễn Minh Hà, Toán nâng cao và các chuyên đề hình học 10, NXB Giáo Dục Việt Nam.

[3]. Đoàn Quỳnh (Chủ biên), Tài liệu giáo khoa chuyên toán hình học 10. NXB Giáo Dục Việt Nam.

[4 ] Selected Problems of Vietnamese Mathematical Olympiad, Lê Hải Châu, Lê Hải Khôi.

[5] Tạp chí AMM

[6]Tạp chí toán học và tuổi trẻ.

[7]http://vi.wikipedia.org/wiki

[8] http://forum.mathscope.org/

[9] http://diendantoanhoc.net/home/

[10] http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Butterfly.shtml

[12] Đề thi vô địch môn toán một số quốc gia.

[13] Một số tài liệu trên internet.