DIEN DAN BAT DANG THUC VIET NAM

VietNam Inequality Mathematic Forum

★★★★★

www.vimf.co.cc

Tác Giả Bài Viết:

Admin

★★★

KHÁM PHÁ ĐỊNH LÍ PTOLEME

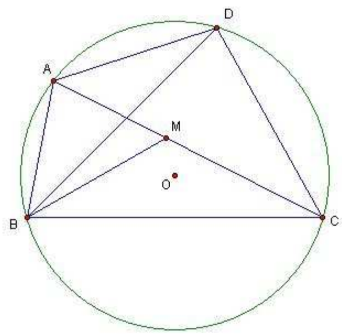
I. Mở đầu:

Hình học là một trong những lĩnh vực toán học mang lại cho người yêu toán nhiều điều thú vị nhất và khó khăn nhất. Nó đòi hỏi ta phải có những suy nghĩ sáng tạo và tinh tế. Trong lĩnh vực này cũng xuất hiện ko ít những định lí, phương pháp nhằm nâng cao tính hiệu quả trong quá trình giải quyết các bài toán, giúp ta chinh phục những đỉnh núi ngồ ghề và hiểm trở. Trong bài viết này zaizai xin giới thiệu đến các bạn một vài điều cơ bản nhất về định lí Ptô-lê-mê trong việc chứng minh các đặc tính của hình học phẳng. Dù đã rất cố gắng nhưng bài viết sẽ không thể tránh khỏi những thiếu xót mong rằng các bạn sẽ cùng zaizai bổ sung và phát triển nó.

II. Nội dung - Lí thuyết:

1. Đẳng thức Ptô-lê-mê:
Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Khi đó:

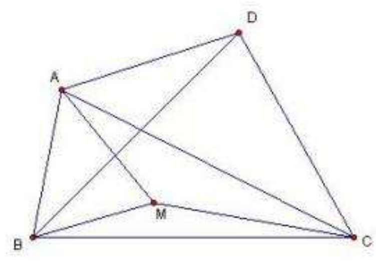
$$\boxed{\mathrm{AC.BD} = \mathrm{AB.CD} + \mathrm{AD.BC}}$$



Chứng minh:

Lấy M thuộc đường chéo AC sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{MBC}$
Khi đó xét ΔABD và ΔMBC có:
$\widehat{ABD} = \widehat{MBC}, \widehat{ADB} = \widehat{MCB}.$
Nên ΔABD đồng dạng với ΔMBC (g.g).
Do đó ta có:
$\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{MC}{BC} \Rightarrow ADBC = BDMC(1)$.
Lại có: $\dfrac{BA}{BD} = \dfrac{BM}{BC}$ và $\widehat{ABM} = \widehat{DBC}$ nên $\Delta ABM \sim \Delta DBC(gg)$
Suy ra $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{BD}{CD}$ hay $ABCD = AMBD(2).$
Từ (1)và (2) suy ra: $\mathrm{AD.BC} + \mathrm{AB.CD} = \mathrm{BD.MC} + \mathrm{AM.BD} = \mathrm{AC.BD}$
Vậy đẳng thức Ptô-lê-mê được chứng minh.

2, Bất đẳng thức Ptô-lê-mê
Đây có thể coi là định lí Ptô-mê-lê mở rộng bởi vì nó không giới hạn trong lớp tứ giác nội tiếp .



Định lí: Cho tứ giác ABCD. Khi đó:
$$\boxed{AC.BD \le AB.CD + AD.BC}$$
Chứng minh:
Trong $\widehat{ABC}$ lấy điểm M sao cho:
$\widehat{ABD} = \widehat{MBC}, \widehat{ADB} = \widehat{MCB}$
Dễ dàng chứng minh:
$$\Delta BAD \sim \Delta BMC \Rightarrow \frac{AD}{MC} = \frac{BD}{CB} \Rightarrow BD.CM = AD.CB$$
Cũng từ kết luận trên suy ra:

$\dfrac{AB}{BM}=\dfrac{BD}{BC},\widehat{ABM}=\widehat{DBC}\ \Rightarrow \Delta ABM\sim\Delta DBC(cgc)\Rightarrow \dfrac{AB}{AM}=\dfrac{BD}{CD}\Rightarrow AB.DC=BD.AM$

Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác và các điều trên ta có:

$AD.BC+AB.DC=BD(AM+CM)\geq BD.AC$

Vậy định lí Ptô-lê-mê mở rộng đã được chứng minh.

3, Định lí Ptô-lê-mê tổng quát:

Trong mặt phẳng định hướng cho đa giác $A_0, A_1, ..., A_{2n}$ nội tiếp đường tròn (O). M là một điểm thuộc cung A_0A_{2n} (Không chứa A_1; ...; A_{2n-1})

Khi đó:

$$\sum_{0\leq k\leq n} tg[\frac{1}{4}OA_{2k-2},OA_{2k})]+tg[\frac{1}{4}OA_{2k},OA_{2k+2})]OA_{2k}\ =\sum_{1\leq k\leq n} tg[\frac{1}{4}OA_{2k-3},OA_{2k-1})]+tg[\frac{1}{4}OA_{2k-1},OA_{2k+1})]OA_{2k-1}$$

Trong đó:

$$A_{-1}=A_{2n},\ A_{-2}=A_{2n-1},\ A_{2n+1}=A_0,\ A\_\{2n+2\}=A_1$$

Đây là một định lí không dễ dàng chứng minh được bằng kiến thức hình học THCS. Các bạn có thể tham khảo phép chứng minh trong bài viết Định lí Ptô-lê-mê tổng quát của Tiến sĩ Nguyễn Minh Hà, ĐHSP , Hà Nội thuộc Tuyển tập 5 năm Tạp chí toán học và tuổi trẻ.

<u>III, Ứng dụng của định lí Ptô-lê-mê trong việc chứng minh các đặc tính hình học:</u>

1, Chứng minh quan hệ giữa các đại lượng hình học

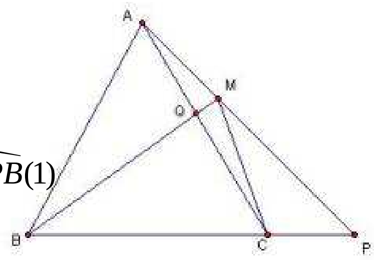
Mở đầu cho phần này chúng ta sẽ đến với 1 ví dụ điển hình và cơ bản về việc ứng dụng định lí Ptô-lê-mê.

Bài toán 1. *Cho tam giác đều ABC có các cạnh bằng a (a>0).Trên AC lấy điểm Q di động, trên tia đối của tia CB lấy điểm P di động sao cho* $AQ.BP=a^2$. *Gọi M là giao điểm của BQ và AP. Chứng minh rằng: AM+MC=BM*

Đề thi vào trường THPT chuyên Lê Quí Đôn, thị xã Đông Hà, tỉnh Quảng Trị, 2005-2006

<u>Chứng minh:</u>

Từ giả thiết $AQ.BP=a^2$ suy ra $\dfrac{AQ}{AB}=\dfrac{AB}{BP}$.



Xét ΔABQ và ΔBPA có:

$\dfrac{AQ}{AB}=\dfrac{AB}{BP}(gt)\widehat{BAQ}=\widehat{ABP}\Rightarrow\Delta ABQ\sim\Delta BPA(cgc)\Rightarrow\widehat{ABQ}=\widehat{APB}(1)$

Lại có $\widehat{ABQ}+\widehat{MBP}=60^o(2)$

Từ: $(1),(2)\Rightarrow\widehat{BMP}=180^o-\widehat{MBP}-\widehat{MPB}=120^o\ \Rightarrow\widehat{AMB}=180^o-\widehat{BMP}=180^o-120^o=60^o=\widehat{ACB}.$

Suy ra tứ giác AMCB nội tiếp được đường tròn.

Áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho tứ giác AMCB nội tiếp và giả thiết AB=BC=CA ta có:

$ABMC+BCAM=BM.AC\Rightarrow AM+MC=BM$ (đpcm)

Đây là 1 bài toán khá dễ và tất nhiên cách giải này ko được đơn giản lắm.Vì nếu muốn sử dụng đẳng thức Ptô-lê-mê trong 1 kì thi thì có lẽ phải chứng minh nó dưới dạng bổ đề. Nhưng điều chú ý ở đây là ta chẳng cần phải suy nghĩ nhiều khi dùng cách trên trong khi đó nếu dùng cách khác thì lời giải có khi lại ko mang vẻ tường minh.

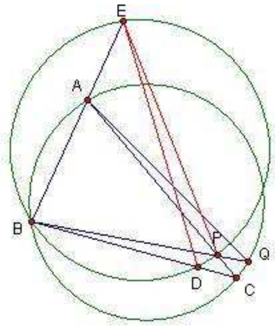
Bài toán 2. *Tam giác ABC vuông có BC>CA>AB. Gọi D là một điểm trên cạnh BC, E là một điểm trên cạnh AB kéo dài về phía điểm A sao cho BD=BE=CA. Gọi P là một điểm trên cạnh AC sao cho E, B, D, P nằm trên một đường tròn. Q là giao điểm thứ hai của BP với đường tròn ngoại tiếp* $\triangle ABC$. *Chứng minh rằng: AQ+CQ=BP*

Đề thi chọn đội tuyển Hồng Kông tham dự IMO 2000, HongKong TST 2000

<u>Chứng minh:</u>

Xét các tứ giác nội tiếp ABCQ và BEPD ta có:

$\widehat{CAQ} = \widehat{CBQ} = \widehat{DEP}$ (cùng chắn các cung tròn)
Mặt khác $\widehat{AQC} = 108^o - \widehat{ABC} = \widehat{EPD}$
Xét ΔAQC và ΔEPD có:
$$\widehat{AQC} = \widehat{EPD}, \widehat{CAQ} = \widehat{DEP} \Rightarrow \Delta AQC \sim \Delta EPD \Rightarrow \frac{AQ}{EP} = \frac{CA}{ED} \Rightarrow AQ.ED = EP.CA = EP.BD (1)$$

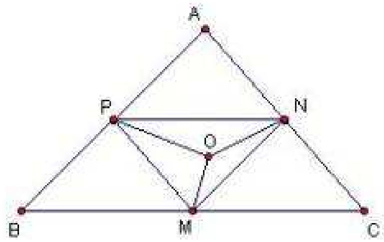


(do AC=BD)
$\frac{AC}{ED} = \frac{QC}{PD} \Rightarrow ED.QC = AC.PD = BE.PD (2)$ (do AC=BE)
Áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho tứ giác nội tiếp BEPD ta có:
EP.BD+BE.PD=ED.BP
Từ (1), (2), (3) suy ra:
$AQ.ED + QC.ED = ED.BP \Rightarrow AQ + QC = BP$ (đpcm)

Có thể thấy rằng bài 1 là tư tưởng đơn giản để ta xây dựng cách giải của bài 2. Tức là dựa vào các đại lượng trong tam giác bằng nhau theo giả thiết ta sử dụng tam giác đồng dạng để suy ra các tỉ số liên quan và sử dụng phép thế để suy ra điều phải chứng minh. Cách làm này tỏ ra khá là hiệu quả và minh họa rõ ràng qua 2 ví dụ mà zaizai đã nêu ở trên. Để làm rõ hơn phương pháp chúng ta sẽ cùng nhau đến với việc chứng minh 1 định lí bằng chính Ptô-lê-mê.

Bài toán 3. (Định lí Carnot)
Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn (O, R) và ngoại tiếp đường tròn (I, r). Gọi x,y,z lần lượt là khoảng cách từ O tới các cạnh tam giác. Chứng minh rằng:
x+y+z=R+r

Chứng minh:
Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.
Giả sử x=OM, y=ON, z=OP, BC=a, CA=b, AB=c.
Tứ giácOMBP nội tiếp, theo đẳng thức Ptô-lê-mê ta có:
OB.PM=OP.MB+OM.PB



Do đó: $R\frac{b}{2} = z\frac{a}{2} + x\frac{c}{2}$
Tương tự ta cũng có :
$R\frac{c}{2} = y\frac{a}{2} + x\frac{b}{2} (2)$, $R\frac{a}{2} = y\frac{c}{2} + z\frac{b}{2} (3)$
Mặt khác:

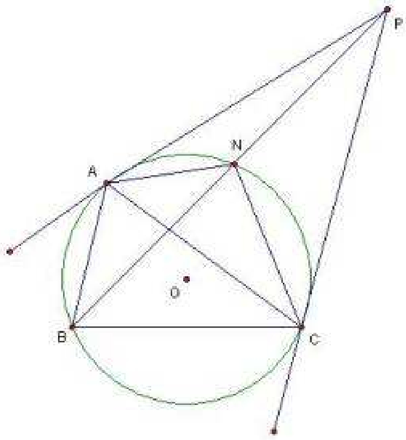
$$r(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}) = S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB} = x\frac{a}{2} + y\frac{b}{2} + z\frac{c}{2} (4)$$
Từ (1), (2), (3), (4) ta có:
$$(R + r)(\frac{a+b+c}{2}) = (x + y + z)(\frac{a+b+c}{2}) \Rightarrow R + r = x + y + z$$
Đây là 1 định lí khá là quen thuộc và cách chứng minh khá đơn giản. Ứng dụng của định lí này như đã nói là dùng nhiều trong tính toán các đại lượng trong tam giác. Đối với trường hợp tam giác đó không nhọn thì cách phát biểu của định lí cũng có sự thay đổi.

2, Chứng minh các đặc tính hình học

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và AC=2AB. Các đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại A, C cắt nhau ở P. Chứng minh rằng BP đi qua điểm chính giữa của cung BAC.*

Chứng minh:

Gọi giao điểm của BP với đường tròn là N. Nối AN, NC.



Xét $\triangle NPC$ và $\triangle CPB$ có: $\widehat{PCN}=\widehat{PBC},\hat{P}$ chung

$\Rightarrow \Delta NPC \sim \Delta CPB(gg) \Rightarrow \dfrac{PC}{PB}=\dfrac{NC}{BC}(1)$

Tương tự ta cũng có

$\Delta PAN \sim \Delta PBA(gg) \Rightarrow \dfrac{AP}{BP}=\dfrac{AN}{AB}(2)$

Mặt khác PA=PC(do là 2 tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau)

Nên từ

$(1),(2) \Rightarrow \dfrac{PA}{PB}=\dfrac{NC}{BC}=\dfrac{AN}{AB} \Rightarrow NCAB=BCAN(3)$

Áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho tứ giác nội tiếp ABCN ta có:
AN.BC+AB.NC=AC.BN

Từ $(3) \Rightarrow 2AB.NC=AC.BN=2AB.BN \Rightarrow NC=BN$

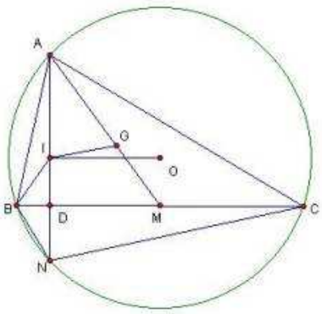
Vậy ta có điều phải chứng minh.

Đây có lẽ là một trong những lời giải khá là ngắn và ấn tượng của bài này.Chỉ cần qua vài quá trình tìm kiếm các cặp tam giác đồng dạng ta đã dễ dàng đi đến kết luận của bài toán. Tư tưởng ban đầu khi làm bài toán này chính là dựa vào lí thuyết trong cùng một đường tròn hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau. Do có liên quan đến các đại lượng trong tứ giác nội tiếp nên việc chứng minh rất dễ dàng.

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp, O là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm G. Giả sử rằng* $\widehat{OIA}=90^o$ *. Chứng minh rằng IG song song với BC.*

Chứng minh

Kéo dài AI cắt (O) tại N. Khi đó N là điểm chính giữa cung BC (không chứa A).



Ta có: BN=NC (1). Lại có :

$\widehat{IBN}=\widehat{BIN} \Rightarrow BN=IN(2)$

Do $OI \perp AE \Rightarrow IA=IN=\dfrac{1}{2}$ sđ cung BC(3)

Từ $(1),(2),(3) \Rightarrow BN=NC=IN=IA(4)$ Áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho tứ giác nội tiếp ABNC ta có:
BN.AC+AB.NC=BC.AN

Từ $(4) \Rightarrow BN(AC+AB)=2BN.BC \Rightarrow AC+AB=2BC(5)$

Áp dụng tính chất đường phân giác trong tam giác và (5) ta có:

$\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{IA}{ID}=\dfrac{AC}{CD}=\dfrac{AB+AC}{BD+CD}=\dfrac{AB+AC}{BC}=\dfrac{2BC}{BC}=2$

Vậy $\dfrac{IA}{ID}=2(6)$

Mặt khác G là trọng tâm của tam giác suy ra $\dfrac{AG}{GM}=2(7)$

Từ $(6),(7) \Rightarrow \dfrac{IA}{ID}=2=\dfrac{AG}{GM}$

Suy ra IG là đường trung bình của tam giác ADM hayIG song song với BC.

Đây là một bài toán khá là hay ít nhất là đối với THCS và với cách làm có vẻ "ngắn gọn" này ta đã phần nào hình dung được vẻ đẹp của các định lí.

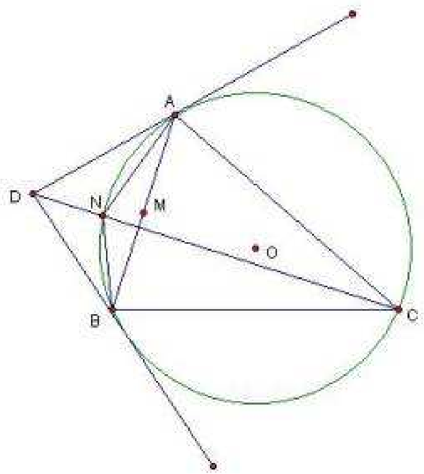
Bài toán 3. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), CM là trung tuyến. Các tiếp tuyến tại A và B của (O) cắt nhau ở D. Chứng minh rằng:* $\widehat{ACD}=\widehat{BCM}$

Chứng minh:

Gọi N là giao điểm của CD với (O). Xét tam giác DNB và DBC có:

$\widehat{ACD} = \widehat{BCM}$ chung.

$\Rightarrow \Delta DBN \sim \Delta DCB(gg) \Rightarrow \frac{NB}{CB} = \frac{BD}{CD}(1)$



Tương tự ta cũng có :

$\Delta DNA \sim \Delta DAC(gg) \Rightarrow \frac{NA}{AC} = \frac{DA}{CD}(2)$

Mà BD = DA nên từ

$(1),(2) \Rightarrow \frac{NB}{CB} = \frac{NA}{AC} \Rightarrow NB.AC = AN.BC(3)$

Áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho tứ giác nội tiếp ANBC ta có: AN.BC + BN.AC = AB.NC

Từ (3) và giả thiết

$AB = 2BM \Rightarrow 2ANBC = 2BMNC \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{BM}{BC}$

Xét ΔBMC và ΔNAC có:

$\widehat{MBC} = \widehat{ANC}, \frac{AN}{NC} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \Delta BMC \sim \Delta NAC(cgc) \Rightarrow \widehat{BCM} = \widehat{NAC}$

Vậy bài toán được chứng minh.

Cơ sở để ta giải quyết các bài toán dạng này là tạo ra các tứ giác nội tiếp để áp dụng định lí sau đó sử dụng lí thuyết đồng dạng để tìm ra mối quan hệ giữa các đại lượng. Đây là một lối suy biến ngược trong hình học.

3, Chứng minh các đẳng thức hình học

<u>Bài toán 1.</u> *Giả sử M, N là các điểm nằm trong* $\triangle ABC$ *sao cho* $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}, \widehat{MBA} = \widehat{NBC}$.
Chứng minh rằng:

$$\frac{AM.AN}{AB.AC} + \frac{BM.BN}{BA.BC} + \frac{CM.CN}{CA.CB} = 1$$

<u>Chứng minh:</u>

Lấy điểm K trên đường thẳng BN sao cho $\widehat{BCK} = \widehat{BMA}$, lúc đó $\Delta BMA \sim \Delta BCK$ suy ra:

$\frac{AB}{BK} = \frac{BM}{BC} = \frac{AM}{CK}(1) \Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{BK}{BC}$

Mặt khác dễ thấy rằng $\widehat{ABK} = \widehat{MBC}$, từ đó $\Delta ABK \sim \Delta MBC$ dẫn đến $\frac{AB}{BM} = \frac{BK}{BC} = \frac{AK}{CM}(2)$

Cũng từ $\Delta BMA \sim \Delta BCK$ ta có:

$\widehat{CKN} = \widehat{BAM} = \widehat{NAC}$ suy ra tứ giác ANCK nội tiếp đường tròn.

Áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho tứ giác ABCK ta có:

AC.NK = AN.CK + CN.AK (3)

Nhưng từ (1) và (2) thì :

$CK = \frac{AM.BC}{BM}, AK = \frac{AB.CM}{BM}, BK = \frac{AB.BC}{BM}$

Nên ta có đẳng thức (3)

$\Leftrightarrow AC(BK - BN) = ANCK + CNAKAC(\frac{AB.BC}{BM} - BN) = \frac{ANAMBC}{BM} + \frac{CNABCM}{BM}$

$\Leftrightarrow ABBCCA = ANAMBC + CNABCM + BNBMAC \Leftrightarrow \frac{AM.AN}{AB.AC} + \frac{BM.BN}{BA.BC} + \frac{CM.CN}{CA.CB} = 1$

Đây là 1 trong những bài toán khá là cổ điển của IMO Shortlist. Ta vẫn có thể giải quyết bài toán theo một hướng khác nhưng dài và phức tạp hơn đó là sử dụng bổ đề: Nếu M,N là các điểm thuộc cạnh BC của ΔABC *sao cho* $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$ *thì* $AMAN = ABAC - \sqrt{BMBNCM.CN}$ *. Đây là một bổ đề mà các bạn cũng nên ghi nhớ.*

<u>Bài toán 2.</u> *Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O). Chứng minh rằng:*

$$\frac{AC}{BD} = \frac{BCCD + ABBD}{BCBA + DCDA}$$

<u>*Chứng minh:*</u>

Lấy E và F thuộc đường tròn sao cho:

$\overset{\frown}{CDB} = \overset{\frown}{ADE}, \overset{\frown}{BDA} = \overset{\frown}{DCF}$

Khi đó: $\mathrm{AE = BC,\ FD = AB,\ EC = AB,\ BF = AD}$

Áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho hai tứ giác nội tiếp AECD và BCDF ta có:

$\mathrm{AC.ED = AE.CD + AD.EC = BC.CD + AD.AB}\ (1),\ \mathrm{BD.CF = BC.DF + BF.CD = BC.AB + AD.CD}\ (2)$

Mặt khác:

$\overset{\frown}{CDE} = \overset{\frown}{CDB} + \overset{\frown}{BDE} = \overset{\frown}{ADE} + \overset{\frown}{BDE} = \overset{\frown}{ADB} = \overset{\frown}{FCD}$

Do đó:

$\overset{\frown}{FDC} = \overset{\frown}{FDE} + \overset{\frown}{EDC} = \overset{\frown}{FCE} + \overset{\frown}{FCD} = \overset{\frown}{ECD}$

Suy ra: $\mathrm{ED = FC}\ (3)$

Từ (1), (2), (3) ta có điều phải chứng minh.

<u>Bài toán 3.</u> *Cho tam giác ABC với BE, CF là các đường phân giác trong. Các tia EF, FE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác theo thứ tự tại M và N. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{BM} + \frac{1}{CN} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CM}$$

<u>*Chứng minh:*</u>

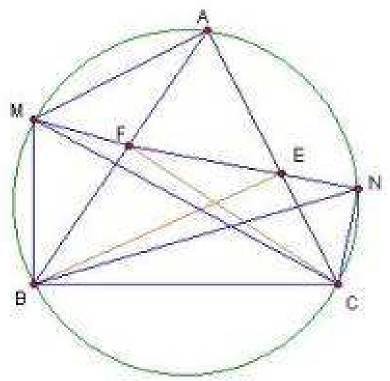
Đặt BC=a, CA=b, AB=c

Áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho hai tứ giác nội tiếp AMBC và ANCB ta có:

$\mathrm{a.AM + b.BM = c.CM}\ (1),\ \mathrm{a.AN + a.CN = b.BN}\ (2)$

Từ (1) và (2) ta được:

$\mathrm{a(AM + AN) = b(BN - BM) + c(CM - CN)}\ \ (3)$



Mặt khác ta lại có:

$\Delta ANF \sim \Delta NBF(gg) \Rightarrow \dfrac{AM}{BN} = \dfrac{MF}{BF}(4)$

Tương tự :

$\Delta ANF \sim \Delta MBF(gg) \Rightarrow \dfrac{AN}{BM} = \dfrac{AF}{MF}(5)$

Từ (4), (5) và tính chất đường phân giác ta có:

$\dfrac{AM.AN}{BM.BN} = \dfrac{AF}{BF} = \dfrac{b}{a}(6)$

Chứng minh tương tự ta được:

$\dfrac{AM.AN}{CM.CN} = \dfrac{AE}{CE} = \dfrac{c}{a}(7)$

Từ (3), (6), (7) ta có điều phải chứng minh.

Có thể dễ dàng nhận ra nét tương đồng giữa cách giải của 3 bài toán đó là vận dụng cách vẽ hình phụ tạo ra các cặp góc bằng các cặp góc cho sẵn từ đó tìm ra các biểu diễn liên quan. Một đường lối rất hay được sử dụng trong các bài toán dạng này.

4, Chứng minh bất đẳng thức và giải toán cực trị trong hình học

Bài toán 1 (Thi HSG các vùng của Mĩ, năm 1987)
Cho một tứ giác nội tiếp có các cạnh liên tiếp bằng a,b,c,d và các đường chéo bằng p,q. Chứng minh rằng:

$$pq \le \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

Chứng minh:
Áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho tứ giác nội tiếp thì ac+bd=pq
Vậy ta cần chứng minh $p^2q^2 = (ac+bd)^2 \le (a^2+b^2)(c^2+d^2)$
Bất đẳng thức này chính là một bất đẳng thức rất quen thuộc mà có lẽ ai cũng biết đó là bất đẳng thức Bunhiacopxki-BCS. Vậy bài toán được chứng minh.

Một lời giải đẹp và vô cùng gọn nhẹ cho 1 bài toán tưởng chừng như là khó. Ý tưởng ở đây là đưa bất đẳng thức cần chứng minh về 1 dạng đơn giản hơn và thuần đại số hơn. Thật thú vị là bất đẳng thức đó lại là BCS.

Bài toán 2. *Cho lục giác lồi ABCDEF thỏa mãn điều kiện* $\mathrm{AB}=\mathrm{BC},\ \mathrm{CD}=\mathrm{DE},\ \mathrm{EF}=\mathrm{FA}$
Chứng minh rằng:

$$\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\ge\frac{3}{2}+\frac{(AC-CE)^2+(CE-AE)^2+(AE-AC)^2}{(AC+CE)^2+(CE+AE)^2+(AE+AC)^2}$$

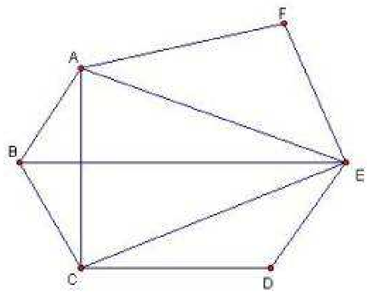
Chứng minh:
Đặt AC=a, CE=b, AE=c. Áp dụng định lí Ptô-lê-mê mở rộng cho tứ giác ACEF ta có: $AC.EF+CE.AF\ge AE.CF$.
Vì EF=AF nên suy ra:

$$\frac{FA}{FC}\ge\frac{c}{a+b}$$

Tương tự ta cũng có:

$$\frac{DE}{DA}\ge\frac{b}{c+a},\frac{BC}{BE}\ge\frac{a}{b+c}$$

Từ đó suy ra



$$\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\ge\frac{3}{2}+\frac{(AC-CE)^2+(CE-AE)^2+(AE-AC)^2}{(AC+CE)^2+(CE+AE)^2+(AE+AC)^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}\ge\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{2(b+c)(a+c)}+\frac{(b-c)^2}{2(b+a)(c+a)}+\frac{(c-a)^2}{2(c+b)(a+b)}\ge\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}$$

$$\Leftrightarrow\sum(a-b)^2\left[\frac{1}{2(a+c)(b+c)}-\frac{1}{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}\right]$$

Bất đẳng thức đã qui về dạng chính tắc SOS :

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge0$$

Dễ thấy:

$$2(a+c)(b+c) \le (a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2 \;\Rightarrow \frac{1}{2(a+c)(b+c)} \ge \frac{1}{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}$$

Như vậy $S_c \ge 0$, đánh giá tương tự ta cũng dễ dàng thu được kết quả $S_a, S_b \ge 0$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a=b=c.

Tức là khi ABCDEF là một lục giác đều nội tiếp.

Đây là một bài toán do zaizai phát triển từ một bài toán quen thuộc. Nó cũng xuất phát từ bài Stronger than Nesbit inequality của mình. Cơ sở khi giải bài toán này là sử dụng phương pháp SOS để làm mạnh bài toán.Với bước chuyển từ việc chứng minh 1 bất đẳng thức hình học sang bất đẳng thức đại số ta dễ dàng tìm ra 1 lời giải đẹp. Nếu chuẩn hóa bất đẳng thứ này ta cũng có kết quả rất thú vị.

Bài toán 3. *Cho lục giác lồi ABCDEF thỏa mãn điều kiện AB=BC, CD=DE, EF=FA và tổng độ dài ba cạnh AC, CE, AEbằng 3. Chứng minh rằng:*

$$\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC} \ge \frac{21}{16}+\frac{27(AC^3+CE^3+AE^3)}{16(AC+CE+AE)^3}$$

Lời giải:

Ta chuyển việc chứng minh bất đẳng thức trên về chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{21}{16}+\frac{27(a^3+b^3+c^3)}{16(a+b+c)^3} \Leftrightarrow \frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{3-a} \ge \frac{21}{16}+\frac{(a^3+b^3+c^3)}{16}$$

Bằng cách sử dụng phương pháp hệ số bất định ta dễ dàng tìm được bất đẳng thức phụ đúng:

$$\frac{a}{3-a} \ge \frac{9a+a^3-2}{16} \Leftrightarrow (a-1)^2(a^2-a+6) \ge 0$$

Tương tự với các phân thức còn lại ta có điều phải chứng minh.

Khi định hướng giải bài này chắc hẳn bạn sẽ liên tưởng ngay đến SOS nhưng thật sự thì nó ko cần thiết trong bài toán này bởi chỉ làm phức hóa bài toán. Dùng phương pháp hệ số bất định giúp ta tìm ra 1 lời giải ngắn và rất đẹp. Tuy nhiên lời giải này ko dễ hiểu lắm đối với THCS.

Thực ra cách làm mới bài toán này cũng cực kì đơn giản vì xuất phát điểm của dạng chuẩn là bất đẳng thức Nesbit quen thuộc vì vậy dễ dàng thay đổi giả thiết để biến đổi bài toán. Mà cách thay đổi điều kiện ở đây chính là bước chuẩn hóa trong chứng minh bất đẳng thức đại số. Nói chung là dùng để đồng bậc bất đẳng thức thuần nhất. Với tư tưởng như vậy ta hoàn toàn có thể xây dựng các kết quả mạnh hơn và thú vị hơn qua một vài phương pháp như SOS, hệ số bất định, dồn biến và chuẩn hóa. Đặc biệt sau khi chuẩn hóa ta có thể dùng 3 phương pháp còn lại để chứng minh.

Bài toán 4. *Cho đường tròn (O) và BC là một dây cung khác đường kính của đường tròn. Tìm điểm A thuộc cung lớn BC sao choAB+AC lớn nhất.*

Lời giải:

Gọi D là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

Đặt DB=DC=a không đổi. Theo định lí Ptô-lê-mê ta có:

$$AD.BC = AB.DC + AC.BD = a(AB+AC) \Rightarrow AB+AC = \frac{BC}{a}.AD$$

Do BC và a ko đổi nên AB+AC lớn nhất khi và chỉ khi AD lớn nhất khi và chỉ khi A là điểm đối xứng của D qua tâm O của đường tròn.

IV, Bài tập

Bài 1.(CMO 1988, Trung Quốc)

ABCD là một tứ giác nội tiếp với đường tròn ngoại tiếp có tâm) và bán kính R. Các tia AB, BC, CD, DA cắt (O, 2R) lần lượt tại A', B', C', D'. Chứng minh rằng:

$$A'B'+B'C'+C'D'+D'A' \ge 2(AB+BC+CD+DA)$$

<u>Bài 2.</u> Cho đường tròn (O) và dây cung BC khác đường kính. Tìm điểm A thuộc cung lớn BC của đường tròn để AB+2AC đạt giá trị lớn nhất.
<u>Bài 3.</u> Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (O') nằm trong (O) tiếp xúc với (O) tại T thuộc cung AC (ko chứa B). Kẻ các tiếp tuyến AA', BB', CC' tới (O'). Chứng minh rằng:
$BB'.AC = AA'.BC + CC'.AB$
<u>Bài 4.</u> Cho lục giác ABCDEF có các cạnh có độ dài nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng trong ba đường chéo AD, BE, CF có ít nhất một đường chéo có độ dài nhỏ hơn 2.
<u>Bài 5.</u> Cho hai đường tròn đồng tâm, bán kính của đường tròn này gấp đôi bán kính của đường tròn kia. ABCD là tứ giá nội tiếp đường tròn nhỏ. Các tia AB,BC,CD,DA lần lượt cắt đường tròn lớn tại A',B',C',D'. Chứng minh rằng: chu vi tứ giác A'B'C'D' lớn hơn 2 lần chu vi tứ giác ABCD.