CHUYÊN ĐỀ ĐỊNH LÝ PTOLEMY

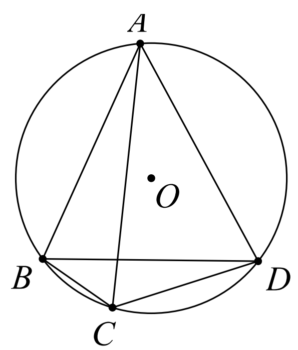
Ngày 1 tháng 11 năm 2012

Nguyễn Thị Nguyên Khoa, lớp 10T1 trường THPT chuyên Quốc Học, Huế

I. Định lí Ptolemy:

Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Khi đó:

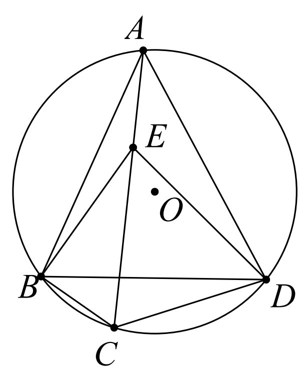
$$AC.BD = AB.CD + AD.BC.$$



Chứng minh

Bài toán này có nhiều cách chứng minh, sau đây xin giới thiệu hai cách đơn giản và dễ hiểu nhất.

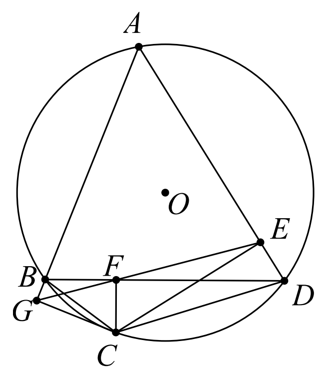
Cách 1:



Trên AC lấy điểm E sao cho $\widehat{ADE} = \widehat{BDC}$. Khi ấy ta có $\Delta AED \backsim \Delta BCD (g.g)$.
Nên ta suy ra: $AD.BC = AE.BD$. (1)
Mặt khác ta cũng có:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{DE}{DC} \Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{BD}{DC}.$$

Từ đây ta suy ra: $\Delta ADB \backsim \Delta EDC (c.g.c) \Rightarrow AB.DC = DB.EC$. (2)
Từ $(1),(2)$ ta suy ra: $AB.DC + AD.BC = BD(EC + AE) = DB.AC$.
Ta có điều phải chứng minh.
<u>Cách 2:</u>



Từ C vẽ $CE \perp AD, CF \perp BD, CG \perp AB, (E \in AD, F \in BD, G \in AB)$.
Theo định lí Simson, ta có G, F, E thẳng hàng.
Ta có: $GF + FE = GE$. Áp dụng định lí hàm số sin, ta có:

$$GF = BC.\sin B; EF = DC.\sin D; GE = AC \sin A.$$

$$\sin B = \frac{AD}{2R}; \sin D = \frac{AB}{2R}; \sin A = \frac{BD}{2R}.$$

Từ trên ta suy ra:

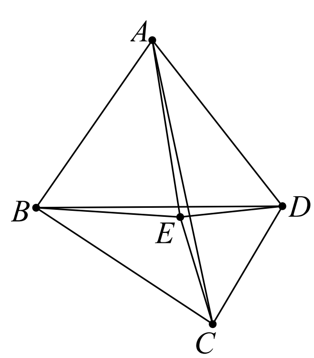
$$\frac{BC.AD}{2R} + \frac{AB.DC}{2R} = \frac{BD.AC}{2R}.$$

Vậy ta có: $BD.AC + AB.DC = BD.AC$ (điều phải chứng minh).

<u>II. Bất đẳng thức Ptolemy:</u>

Cho tứ giác $ABCD$. Khi đó:

$$AB.CD + AD.BC \geq AC.BD.$$



<u>Chứng minh</u>

Lấy điểm E sao cho $\widehat{EAD} = \widehat{DBC}; \widehat{ADE} = \widehat{BDC}$.
Suy ra: $\Delta ADE \backsim \Delta BDC (g.g) \Rightarrow AD.BC = BD.AE.(1)$
Mặt khác ta có:

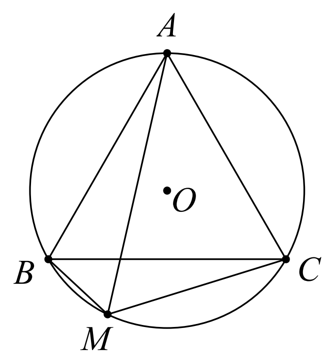
$$\frac{AD}{DB} = \frac{DE}{DC} \Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{DB}{DC}$$

.
Suy ra: $\Delta ADB \backsim \Delta EDC (c.g.c) \Rightarrow AB.DC = BD.EC(2)$.
Từ $(1), (2)$ ta suy ra: $AD.BC + AB.DC = BD.(AE + EC) \geq BD.AC$.
Dấu $" = "$ xảy ra khi tứ giác $ABCD$ nội tiếp được.

III. Tìm hiểu sâu hơn về định lí Ptolemy:

Đầu tiên, ta đến với bài toán khá đơn giản sau đây:
Bài toán 1: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). M thuộc cung nhỏ BC. Chứng minh rằng:

$$AM = BM + CM.$$



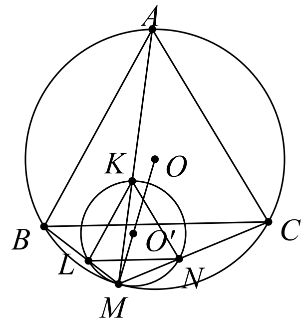
Chứng minh:

Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABMC$ ta có:

$$AM.BC = BM.AC + CM.AB.$$

Mà $BC = CA = AB$. Từ đây ta suy ra $AM = BM + CM$.
Chứng minh hoàn tất.
Bây giờ ta thử mở rộng bài toán bằng cách biến "đường tròn điểm" M thành đường tròn như sau:
Bài toán 2: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). M là điểm bất kì thuộc cung nhỏ BC. Đường tròn (O') tiếp xúc với (O) tại M. AA', BB', CC' lần lượt là các tiếp tuyến từ A, B, C đến (O'). Chứng minh rằng:

$$AA' = BB' + CC'.$$



Chứng minh:

Xét trường hợp đường tròn (O') tiếp xúc trong với đường tròn (O). Trường hợp còn lại ta chứng minh tương tự.
Gọi K, L, N lần lượt là giao điểm của AM, BM, CM với (O').
Suy ra: $AA'^2 = AK.AM; BB'^2 = BL.BM; CC'^2 = CN.CM$.
Vậy ta cần chứng minh:

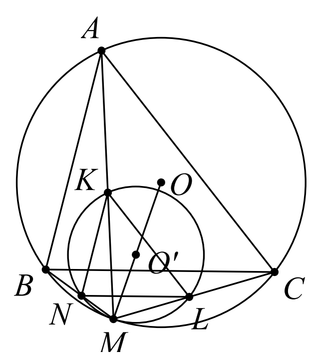
$$\sqrt{AK.AM} = \sqrt{BL.BM} + \sqrt{CN.CM}.(*)$$

Ta có: $LK \parallel AB; KN \parallel AC, LN \parallel BC$.
Suy ra: $\dfrac{AK}{AM} = \dfrac{BL}{BM} = \dfrac{CN}{CM} = k$.
Nên:

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{k.AM.AM} = \sqrt{k.BM.BM} + \sqrt{k.CM.CM} \Leftrightarrow AM = BM + CM.(**)$$

Áp dụng bài toán 1 ta có được (**). Vậy ta có điều phải chứng minh.
Tiếp tục mở rộng bài toán trên bằng cách cho tam giác ABC là một tam giác bất kì, ta được bài toán sau:
Bài toán 3: Cho tam giác ABC nội tiếp (O). M là một điểm bất kì thuộc cung BC không chứa A. Đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O) tại M. AA', BB', CC' lần lượt là các tiếp tuyến từ A, B, C đến đường tròn (O). Chứng minh rằng:

$$AA'.BC = BB'.CA + CC'.AB.$$



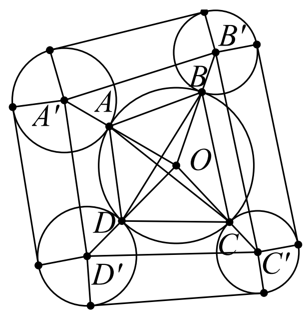
Chứng minh:

Xét trường hợp đường tròn (O') tiếp xúc trong với đường tròn (O). Trường hợp còn lại ta chứng minh tương tự.
Gọi K, L, N lần lượt là giao điểm của AM, BM, CM với (O').
Hoàn toàn tương tự như chứng minh bài toán 2, ta được đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$BC.\sqrt{k.AM.AM} = CA.\sqrt{k.BM.BM} + AB.\sqrt{k.CM.CM} \Leftrightarrow CB.AM = CA.BM + AB.CM.$$

Đẳng thức cuối đúng theo định lí Ptolemy.
Vậy ta có điều phải chứng minh.
Tiếp tục mở rộng bài toán. Xem các điểm A, B, C là các "đường tròn điểm". Như vậy ta sẽ mở rộng bài toán bằng cách thay các điểm A, B, C bằng các đường tròn. Ta có bài toán sau:
Bài toán 4: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Đặt các đường tròn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ là các đường tròn tiếp xúc với $(O; R)$ tại các điểm A, B, C, D. Đặt $t_{\alpha\beta}$ là độ dài tiếp tuyến chung ngoài nếu hai đường tròn α, β cùng tiếp xúc trong hoặc cùng tiếp xúc ngoài với (O), và là độ dài đoạn tiếp xúc trong nếu trong trường hợp còn lại. Các đoạn $t_{\beta\gamma}, t_{\gamma\delta}$, ... được xác định tương tự. Khi đó ta có:

$$t_{\alpha\beta}.t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma}.t_{\alpha\delta} = t_{\alpha\gamma}.t_{\beta\delta}.$$



Đây chính là định lí Casey hay còn gọi là định lí Ptolemy mở rộng.

Chứng minh:

Ta chứng minh trường hợp $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ cùng tiếp xúc ngoài với (O). Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự.
Lần lượt đặt tâm các đường tròn trên là A', B', C', D' và bán kính lần lượt là x, y, z, t.
Đặt $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = m, BD = n$.
Áp dụng định lý Pythagore: $(t_{\alpha\beta})^2 = A'B'^2 - (x-y)^2$.
Mặt khác lại có:

$$A'B'^2 = (R+x)^2 + (R+y)^2 - 2(R+x)(R+y)cos(A'\hat{O}B').$$

$$A'B'^2 = (R+x)^2 + (R+y)^2 - 2(R+x)(R+y)(1 - \frac{a^2}{2R^2}).$$

$$A'B'^2 = (R+x)^2 - 2(R+x)(R+y) + (R+y)^2 + (R+x)(R+y).\frac{a^2}{R^2}.$$

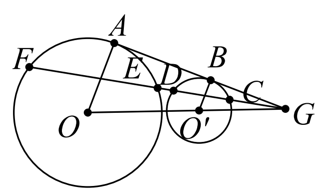
$$A'B'^2 = (x-y)^2 + \frac{a^2}{R^2}.(R+x)(R+y) \Rightarrow t_{\alpha\beta} = \frac{a}{R}.\sqrt{(R+x)(R+y)}.$$

Tương tự với $t_{\beta\gamma}, t_{\gamma\delta}$, ... Ta có:

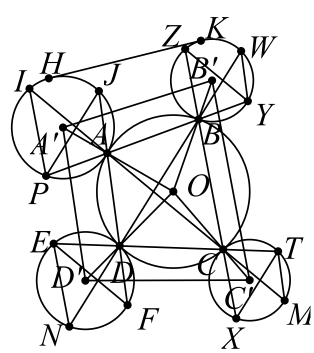
$$t_{\alpha\beta}.t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma}.t_{\alpha\delta} = t_{\alpha\gamma}.t_{\beta\delta} \Leftrightarrow a.c + b.d = m.n.$$

Đẳng thức cuối đúng theo định lí Ptolemy.
Chứng minh hoàn tất.
Nhận xét: Để ý ta thấy rằng ở bài toán 2 và bài toán 3, ta chứng minh được bằng phương tích. Vậy hãy cùng suy nghĩ cách chứng minh định lí Casey theo một hướng khác là sử dụng phương tích.
Như đã thấy, ở bài toán 2 và 3 ta sử dụng phương tích từ một điểm đến đường tròn. Bây giờ ta thử nghĩ đến phương tích của đường tròn đến đường tròn.
Ta đến với bổ đề sau: Cho hai đường tròn $(O), (O')$. AB là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn. AB cắt OO' tại G. Một đường thẳng qua G cắt $(O), (O')$ tại E, F và D, C như hình vẽ. Khi đó ta có:

$$AB^2 = FD.EC$$



Phần chứng minh xin dành cho bạn đọc.
Trở lại với định lí Casey:



Gọi A', B', C', D' là tâm của $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.
Gọi HK là tiếp tuyến chung của α, β Ta có: $HK, AB, A'B'$ đồng quy. (chứng minh xin dành cho bạn đọc)
Kí hiệu các điểm như hình vẽ.
Ta hoàn toàn chứng minh được:

$$IP \parallel EN \parallel BC, WY \parallel TM \parallel AD.$$

$$IJ \parallel ZW \parallel DC, NF \parallel XM \parallel AB.$$
$$PJ \parallel DB \parallel TX, ZY \parallel AC \parallel EF.$$

Áp dụng phương tích của đường tròn đến đường tròn, ta có:

$$t_{\alpha\beta}.t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma}.t_{\alpha\delta} = t_{\alpha\gamma}.t_{\beta\delta}.$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{PB.AY.EC.DT} + \sqrt{AF.DJ.ZC.BX} = \sqrt{IC.AM.DW.NB}(*).$$

Đặt:

$$\frac{PB}{AB} = \frac{JD}{AD} = \frac{IC}{AC} = k.$$
$$\frac{ZC}{BC} = \frac{YA}{AB} = \frac{WD}{BD} = h.$$
$$\frac{TD}{CD} = \frac{XB}{BC} = \frac{MA}{CA} = o.$$
$$\frac{EC}{DC} = \frac{FA}{DA} = \frac{NB}{DB} = a.$$

Suy ra

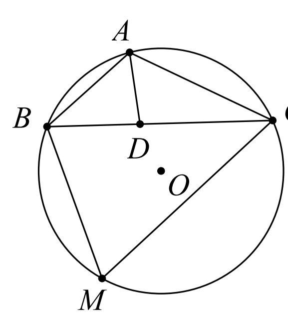
$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{k.AB.h.AB.a.DC.o.DC} + \sqrt{a.DA.k.AD.h.BC.o.BC} = \sqrt{k.AC.o.AC.h.BD.h.BD}.$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{khoa}.AB.DC + \sqrt{khoa}.AD.BC = \sqrt{khoa}.AC.BD.$$
$$\Leftrightarrow AB.DC + AD.BC = AC.BD.$$

Đẳng thức cuối đúng theo định lí Ptolemy.
Vậy ta có điều cần chứng minh.
Như vậy sau quá trình nghiên cứu, tìm tòi lời giải, ta có thể có được lời giải thật tự nhiên và đẹp mặt cho định lí Casey. Hi vọng rằng qua đây, bạn đọc còn phát hiện ra các lời giải mới và độc đáo cho các định lí, bài toán khác.
Chú ý: Định lí Ptolemy còn có nhiều mở rộng rất thú vị khác, các mở rộng này sẽ được giới thiệu ở phần bài tập.

IV. Ứng dụng của định lí Ptolemy và định lí Casey:

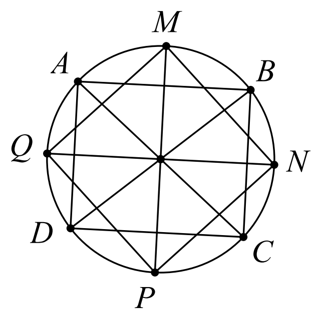
Bài toán 1: Cho tam giác ABC có $\widehat{A} > 90^o$ nội tiếp đường tròn (O) óc AD là phân giác trong $(D \in BC)$. Tìm điểm M thuộc cung lớn BC sao cho $MB.DC + MC.DB$ lớn nhất.

Lời giải:



Do AD là phân giác tròn $\widehat{BAC}$ nên $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{DC}{AC} = k$.
Suy ra: $MB.DC + MC.DB = k.MB.AC + k.MC.AB = k.AM.BC \leq k.2R.BC = const$. Đẳng thức xảy tra khi AM là đường kính. Vậy để $MB.DC + MC.DB$ lớn nhất thì AM là đường kính đường tròn (O).
Bài toán 2: (Đề thi chọn đội tuyển 10 trường THPT Quốc Học năm học 2011-2012)
Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P, Q lần lượt là điểm chính giữa các cung AB, BC, CD, DA không chứa các đỉnh còn lại của tứ giác $ABCD$. Giả sử rằng $AC.BD = MP.NQ$. Chứng minh rằng AC, BD, MP, NQ đồng quy.

Lời giải:



Ta có: $AC.BD = MP.NQ$. Theo định lí Ptolemy, ta suy ra:

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC = MN.QP + QM.NP = MP.QN.$$

Cũng từ giả thiết, ta có: $\widehat{QCM} = \dfrac{\widehat{DCB}}{2}$.
Suy ra: $QM = 2R.\sin QCM = 2R.\sin\dfrac{DCB}{2}$.
Mà BD=2R. $\sin DCB$. Từ đây ta suy ra $\dfrac{QM}{BD} = \dfrac{\sin\dfrac{DCB}{2}}{\sin DCB} = \dfrac{1}{2.\cos\dfrac{DCB}{2}}$.
Tương tự ra có: $\dfrac{PN}{BD} = \dfrac{1}{2.\cos\dfrac{PAN}{2}}$.
Suy ra:

$$\frac{QM.PN}{BD^2} = \frac{1}{4.\cos\dfrac{PAN}{2}.\cos\dfrac{DCB}{2}} = \frac{1}{.\sin\dfrac{DCB}{2}.\cos\dfrac{DCB}{2}} = \frac{1}{2.\sin DCB.}$$

Nên ta suy ra:

$$QM.PN = \frac{BD^2}{2.\sin DCB} = BD.R.$$

Tương tự ta cũng có được:

$$MN.PQ = AC.R.$$

Suy ra: $MN.PQ + QM.PN = R.(AC + BD)$.
Hay:

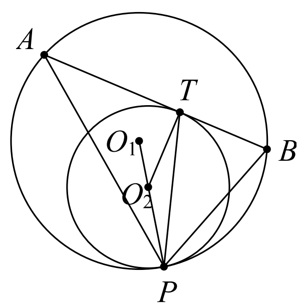
$$AC.BD = R.(AC + BD).$$

$$\Leftrightarrow AC.(BD - R) - (BD - R).R = R^2.$$

$$\Leftrightarrow (AC - R).(BD - R) = R^2.$$

Ta có: $AC \leq 2R; BD \leq 2R$.
Suy ra: $(AC - R).(BD - R) \leq R^2$.
Dấu $" = "$ xảy ra khi $AC = BD = 2R$, hay tứ giác $ABCD$ và $MNPQ$ là hình chữ nhật.
Suy ra AC, DB, MP, NQ đồng quy tại O. (điều phải chứng minh)
Bài toán 3: Cho hai đường tròn $(O_1; R_1); (O_2; R_2)$ tiiếp xúc trong với nhau tại P.Giả sử $R_1 > R_2$. Đường tròn (O_2) tiếp xúc với dây cung AB của đường tròn (O_1) tại T. Chứng minh rằng PT là phân giác $\angle APB$.

Lời giải:



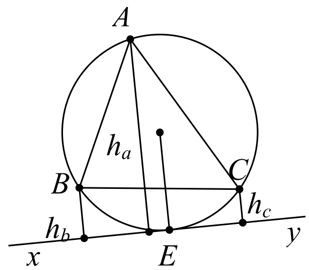
Áp dụng định lí Casey cho các đường tròn $(A), (O_2), (P), (B)$ cùng tiếp xúc trong với (O_1), ta có:

$$AP.BT = AT.BP + PP.AB = AT.BP + 0 \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{AT}{BT}$$

Từ hệ thức cuối ta suy ra được PT là phân giác $\widehat{APB}$.
Chứng minh hoàn tất.
Bài toán 4: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). xy là đường thẳng tiếp xúc với (O) tại điểm thuộc cung BC không chứa A. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đoạn thẳng vuông góc với xy vẽ từ A, B, C. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{h_A}.\sin A = \sqrt{h_B}\sin B + \sqrt{h_C}\sin C$$

Lời giải:



Ta có:

$$h_A = AE.\sin AEx = AE.\frac{AE}{2R} \Rightarrow \sqrt{h_A} = \frac{AE}{\sqrt{2R}}.$$

Tương tự ta có: $\sqrt{h_B} = \dfrac{BE}{\sqrt{2R}}; \sqrt{h_C} = \dfrac{CE}{\sqrt{2R}}$.

Theo định lí Ptolemy ta có:

$$AE.AC = BE.AC + CE.AB.$$

Theo định lí sin ta có:

$$\frac{BC}{\sin BAC} = \frac{CA}{\sin CBA} = \frac{AB}{\sin ACB}.$$

Từ trên ta suy ra: $AE.\sin BAC = BC.\sin CBA + CE.\sin ACB$.

Suy ra:

$$\sqrt{h_A.2R}.\sin BAC = \sqrt{h_B.2R}.\sin CBA + \sqrt{h_C.2R}\sin ACB.$$

Nên ta suy ra:

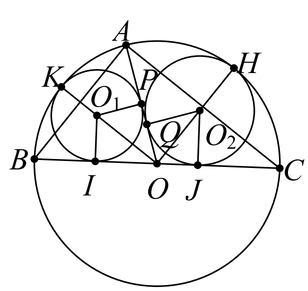
$$\sqrt{h_A}.\sin A = \sqrt{h_B}\sin B + \sqrt{h_C}\sin C.$$

Ta có điều cần chứng minh.

Bài toán 5: Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O).β là đường tròn tiếp xúc với $OB, OA, (O)$. γ là đường tròn tiếp xúc với $OC, OA, (O)$. P, Q là tiếp điểm của β, γ với OA. Chứng minh rằng:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AP}{AQ}$$

Lời giải:



Gọi I, J lần lượt là tiếp điểm của β, γ với BC.
Áp dụng định lí Casey cho các đường tròn $\beta, (B), (C), (A)$, ta có:

$$AP.BC + BI.AC = CI.AB.$$

$$\Leftrightarrow AP.BC + AP.AC = (BC - AP).AB.$$

$$\Leftrightarrow AP.(AB + BC + CA) = BC.AB.$$

Tương tự, ta cũng có đượ:c

$$AQ(AB + BC + CA) = BC.AC.$$

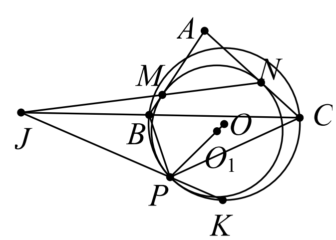
Suy ra:

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{BC.AB}{AB + BC + CA} : \frac{BC.AC}{AB + BC + CA} = \frac{AB}{AC}.$$

Chứng minh hoàn tất.

Bài toán 6: Cho tam giác ABC. $(O; R)$ là đường tròn bất kì đi qua B, C. (O_1, R_1) là đường tròn tiếp xúc với AB, AC và (O) lần lượt tại M, N, P. K là điểm chính giữa cung BPC của (O). Chứng minh rằng BC, MN, KP đồng quy.

Lời giải:



Ta có bổ đề sau: Cho hai đường tròn $(O_1; R_1); (O_2; R_2)$ cùng tiếp xúc trong (ngoài) với $(O; R)$; A, B lần lượt là các tiếp điểm. Kí hiệu t_{12} là độ dài đoạn tiếp tuyến chung ngoài của $(O_1), (O_2)$. Khi đó:

$$t_{12} = \frac{AB}{R}\sqrt{(R \pm R_1)(R \pm R_2)}.$$

Việc chứng minh bổ đề trên, bạn đọc có thể tham khảo ở phần chứng minh định lí Casey.
Xét trường hợp (O_1) tiếp xúc trong với (O). Trường hợp còn lại chứng minh tương tự.
Áp dụng bổ đề trên cho hai đường tròn $(O_1), (B)$ và hai đường tròn $(O_1), (C)$:

$$BM = \frac{BP}{R}\sqrt{R(R - R_1)}; CN = \frac{CP}{R}\sqrt{R(R - R_1)}.$$

Suy ra: $\dfrac{BM}{CN} = \dfrac{BP}{CP}$.
Gọi G là giao điểm của $MN.PC$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABC và cát tuyến GMN, ta có:

$$\frac{BG}{GC}.\frac{CN}{NA}.\frac{AM}{MB} = 1.$$

Suy ra:

$$\frac{BG}{GC} = \frac{BM}{CN} = \frac{BP}{CP}.$$

Suy ra: G là phân giác ngoài $\widehat{BPC}$. Mặt khác PK cũng là phân giác ngoài $\widehat{BPC}$.
Nên ta suy ra: KP, BC, MN đồng quy tại G.
Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 7: (IMO 1995)

Cho lục giác lồi $ABCDEF$ với $AB = BC = CD, DE = EF = FA$ và $\widehat{BCD} = \widehat{EFA} = 60^o$. G, H là hai đểm nằm trong lục giác sao cho $\widehat{AGB} = \widehat{DHE} = 120^o$. Chứng minh rằng:

$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF.$$

Lời giải:

Gọi X, Y là các điểm ở ngoài lục giác sao cho $\Delta ABC, \Delta DEY$ đều.
Ta có: $\widehat{AXB} + \widehat{AGB} = \widehat{DYE} + \widehat{DHE} = 180^o$.
Suy ra tứ giác $AXBG, DHEY$ nội tiếp được. Theo bài toán 1 phần III, ta có: $XG = AG + GB; HY = DH + HE$.
Suy ra:

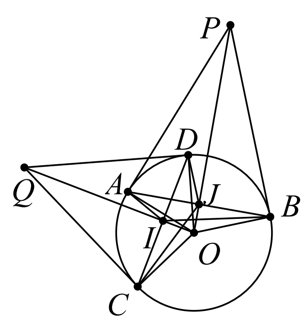
$$AG + GB + GH + DH + HE = HG + GH + HY \geq XY = CF.$$

Ta có điều cần chứng minh.

Bài toán 8: (Đề thi chọn đội tuyển Đà Nẵng 2011)

Cho đường tròn (O). Trên (O) lấy hai điểm cố định A, B sao cho các tiếp tuyến của A, B cắt nhau tại P. Một điểm C di động trên cung lớn AB của (O). Đường thẳng CP cắt (O) tại D khác C. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của CD, AB. Hãy xác định vị trí của đểm C trên cung lớn AB sao cho $S = JD + JC - IA - IB + CD - AB$ đặt giá trị lớn nhất.

Lời giải:



Ta có tứ giác $PAIB$ nội tiếp được đường tròn.

Áp dụng định lí Ptolemy vào tứ giác $PAIB$ ta có:

$$PA.IB + PB.IA = PO.AB \Rightarrow IA + IB = \frac{PO.AB}{PA}.$$

Gọi Q là giao điểm của tiếp tuyến tai C, D của đường tròn (O).
Tương tự, ta có:

$$JD + JC = \frac{QO.DC}{QD}.$$

Ta có:

$$\frac{PO.AB}{PA} = \frac{AO}{AJ}.AB = \frac{2R}{AB}.AB = 2R.$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\frac{QO.DC}{QD} = 2R$$

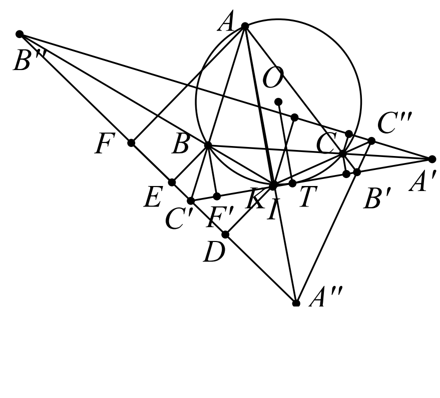
Suy ra: $ID + IC = IA + IB$.
Suy ra:

$$S = JD + JC - IA - IB + CD - AB = CD - AB \leq 2R - AB = const$$

Dấu " = " xảy ra khi C là điểm chính giữa cung lớn AB.
Bài toán 9: (IMO 2011)
Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn Γ. Gọi l là tiếp tuyến tới Γ, và l_a, l_bl, l_c là các đường thẳng đối xứng với l qua BC, CA, AB tương ứng.Chứng tỏ rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác xác định bởi l_a, l_b, l_c tiếp xúc với đường tròn Γ.

Lời giải:

(Dựa theo CHOW Chi Hong- thành viên đội IMO HongKong 2011)
Ta có bổ đề sau: Cho tam giác ABC nhọn và đường thẳng l bất kì. Dựng các đường thẳng đối xứng với l qua các cạnh BC, CA, AB. Chúng cắt nhau tạo thành tam giác $A'B'C'$. Chứng minh tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Phần chứng minh bổ đề trên xin dành cho bạn đọc.
Trở lại bài toán 9:



Không mất tính tổng quát giả sử l tiếp xúc với (O) tại điểm T thuộc cung BC không chứa A.
l_a, l_b, l_c cắt nhau tạo thành tam giác A', B', C' như hình vẽ. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$, bán kính r; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$.
Vẽ $AK \perp l; AF \perp A'B'; IN \perp A'B'; = AK = h_A$.
Gọi t_X là độ dài đoạn tiếp tuyến từ X đến Γ.Ta có:

$$t_{A'} = \sqrt{A'I.A'A} = \sqrt{\frac{ID}{\sin DA'I}.\frac{AF}{\sin DA'I}}.$$

$$= \frac{\sqrt{ID.AK}}{\sin DA'I} = \frac{\sqrt{ID.AK}}{\cos A} = \frac{\sqrt{r.h_a}}{\cos A}.$$

Suy ra:

$$t_{A'}.B'C' = \frac{\sqrt{r.h_a}}{\cos A}.2R.\sin(180-2A) = 4R.\sqrt{h_a.r}.\sin a.$$

Hoàn toàn tương tự, ta có:

$$t_{B'}.C'A' = 4R.\sqrt{h_b.r}.\sin B;$$
$$t_{C'}.A'C' = 4R.\sqrt{h_c.r}.\sin C.$$

Từ các hệ thức trên và áp dụng bài tập 4, ta suy ra:

$$t_{A'}.B'C' = t_{B'}.C'A' + t_{C'}.A'B'.$$

Áp dụng định lí Casey đảo (*), ta suy ra $A'B'C')$ tiếp xúc với Γ. Chứng minh hoàn tất.

V. Bài tập đề nghị:

Bài tập 1: (Định lí Lyness)
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn α tiếp xúc với dây cung BC tại D và các cạnh AB, AC tương ứng tại P, Q. Chứng minh rằng I là trung điểm của PQ với I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
Bài tập 2: (Định lí Ptolemy mở rộng cho lục giác)
Cho lục giác $MNPQRL$ nội tiếp đường tròn (O). Đặt $ML = a; PQ = a'; RQ = b; MN = b'; NP = c; LR = c'; RN = e; MG = g; LP = f$. Chứng minh rằng:

$$egf = aa'e + bb'f + cc'g + abc + a'b'c'.$$

Bài tập 3: (Nguyễn Văn Quý - Mathley Round 11)
Cho lục giác $ABCDEF$ các cạnh AB, CD, EF bằng nhau và bằng m đơn vị; các cạnh BC, DE, FA cùng bằng n đơn vị. Các đường chéo AD, BE, CF có độ dài tương ứng là x, y, z đơn vị. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq \frac{3}{(m+n)^2}.$$

Bài tập 4: (IMO 1991)
Cho tam giác ABC và điểm P nằm trong tam giác. Chứng minh rằng góc nhỏ nhất trong các góc $\widehat{PAB}; \widehat{PBC}; \widehat{PCA}$ nhỏ hơn hoặc bằng 30^o.
Bài tập 5: Cho $(2n+1)$ đa giác đều $A_1A_2...A_{2n+1}$. A là điểm thuộc cung A_1A_{2n+1} không chứa các đỉnh còn lại của đa giác. Chứng minh rằng:

$$AA_1 + AA_3 + ... + AA_{2n+1} = AA_2 + AA_4 + ... + AA_{2n}.$$

Bài tập 6: Cho tam giác ABC không cân có D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Đường tròn nội tiếp (I) và đường tròn (DEF)tiếp xúc trong với nhau tại điểm $Feuerbach - F_e$. Chứng minh rằng một trong các đoạn $F_eD; F_eE; F_eF$ có độ dài bằng tổng hai đoạn còn lại.
Bài tập 7: Cho tam giác ABC với $BC = a; CA = b; AB = c, m_a; m_b; m_c$ lần lượt là độ dài ba đường trung tuyến xuất phát từ A, B, C. Chứng minh rằng:

$$8m_am_bm_c \leq \sqrt{(2a^2 + bc)(2b^2 + ca)(2c^2 + ab)}.$$

Bài tập 8: Cũng với các kí hiệu như bài 7, chứng minh rằng:

$$m_a + m_b + m_c \leq \sqrt{3p^2 + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}.$$

Bài tập 9: (Đề thi chọn đội tuyển Phú Thọ năm 2011)
Cho tam giác ABC có $BC > AB > AC$ và $\cos A + \cos B + \cos C = \dfrac{11}{8}$. Lấy X thuộc đoạn BC, Y thuộc tia AC sao cho $BX = AY = AB$. Z nằm trên cung AB không chứa điểm C của đường tròn (ABC) thoả $ZC = ZA + ZB$.Tính:

$$\frac{ZC}{XC + YC}.$$

Bài tập 10: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Hai điểm $M, N \in BC$ sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$. Gọi P, Q là giao điểm thứ hai khác A của AM, AN với đường tròn (O). Chứng minh rằng:

$$AP + AQ > AB + AC > AM + AN.$$

Bài tập 11: (Polta-Mathscope)
Cho tam giác ABC nhọn. D, E, F lần lượt là các tiếp điểm từ các đường tròn bàng tiếp góc $A, B.C$ xuống BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$$DE + EF + ED \geq \frac{AB + BC + CA}{2}$$

Bài tập 12: Cho tam giác ABC nội tiếp (O). P là một điểm bất kì thuộc cạnh BC; AP cắt (O) tại điểm thứ hai là Q. Gọi (O_1) là đường tròn tiếp xúc trong với (O) và tiếp xúc với hai cạnh PA, PB; (O_2) là đường tròn tiếp xúc trong với (O) và tiếp xúc với hai cạnh PC, PA. Gọi $(I_1), (I_2)$ thứ tự là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác PQB, PCQ. Chứng minh rằng: O_1O_1, I_1I_2, BC đồng quy.
Bài tập 13: (hucht-Mathlink)
Cho sáu đường tròn C_i với $i = a, b, c, d, e, f$ cùng tiếp xúc với một đường tròn khác. t_{xy} là độ dài đoạn tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(C_x), (C_y)$. Chứng minh rằng:

$$t_{cf}.t_{ad}.t_{be} = t_{ab}.t_{de}.t_{cf} + t_{bc}.t_{fe}.t_{ad} + t_{cd}.t_{fa}.t_{be} + t_{ab}.t_{cd}.t_{ef} + t_{bd}.t_{de}.t_{fa}$$

Bài tập 14: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp được có K là giao của AC, BD. I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $AKB.(O)$ là đường tròn có tâm J tiếp xúc với KC, KD và cung CD lần lượt tại L, N, X. Chứng minh rằng: XI là phân giác của $\widehat{AXB}$.
Bài toán 15: Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I), nội tiếp (O). (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. D' là điểm đối xứng của D qua EF. Chứng minh rằng AD', BC, OI đồng quy.

Định lí Ptolemy là một định lí rất đẹp và rất hay trong hình học. Phía trên chỉ là một vài ứng dụng của định lí kinh điển này. Do khuôn khổ của bài viết có hạn, tác

giả xin dừng bài viêt ở đây. Mong rằng bạn đọc còn có thêm những tìm hiểu sâu hơn, thú vị hơn định lí này.

Tác giả xin gửi lời cảm ơn đến thầy giáo Nguyễn Khoa Từ - giáo viên trường THCS Nguyễn Tri Phương, người đã truyền cảm hứng và tình yêu hình học đến tác giả. Xin gửi lời cảm ơn đến thầy Châu Ngọc Hùng- giáo viên trường THPT Ninh Hải, Ninh Thuận, anh Ong Thế Phương - lớp 12 Toán trường THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai, anh Huỳnh Phước Trường- học sinh trường THPT Nguyễn Thượng Hiền, TP HCM, chị Nguyễn Hiền Trang - học sinh trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An đã giúp đỡ rất nhiều để tác giả được hoàn thành bài viết này.

Hi vọng qua bài viết nhỏ này, bạn đọc sẽ cảm thấy yêu hơn hình học.

VII. Tài liệu tham khảo:

[1] **Trần Văn Tấn - Các chuyên đề hình học bồi dưỡng học sinh giỏi THCS.**
[2] **Zaizai - Khám phá định lí Ptolemy.**
[3] **Tập san toán học trường THPT chuyên Quốc Học Huế.**
[4] **Oleg Golberg - Ptolemy's theorem.**
[5] **Trần Nam Dũng - Bất đẳng thức Ptolemy và ứng dụng.**
[6] **Diễn đàn Mathscope.org.**
[7] **Diễn đàn Mathlink.ro.**
[8] **Tạp chí Mathematical Excalibur.**
[9] **Shailesh Shirali - On the generalized Ptolemy Theorem.**
[11] **Geometry Mathley.**
[12] **Các tài liệu từ Internet chưa rõ tên tác giả:**
- Định lí Ptolemy, bất đẳng thức Ptolemy và các vấn đề liên quan.
- Các định lí hình phẳng.