BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

Hoàng Minh Quân _Hà Nội
Nick:Batigoal_Mathscope.org
Email:hoangquan9@gmail.com

Bất đẳng thức là một trong những lĩnh vực hay nhất của toán học .Trong số đó bất đẳng thức hình học đòi hỏi cả tư duy hình học lẫn kiến thức về bất đẳng thức đại số cơ bản như Cauchy_Schawrz, AM_GM,…Điều đó khiến không ít bạn trẻ ngại làm bài toán liên quan đến bất đẳng thức hình học.Chính vì vậy batigoal hi vọng chuyên đề sau sẽ giúp ích phần nào cho các bạn. Đặc biệt các bạn yêu thích bất đẳng thức và yêu thích hình học phẳng.

Một số kí hiệu sử dụng trong chuyên đề:

A, B, C là các đỉnh của tam giác.
a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB
h_a, h_b, h_c là độ dài các chiều cao của tam giác ΔABC tương ứng hạ từ các đỉnh A, B, C.
m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến của tam giác ΔABC tương ứng xuất phát từ các đỉnh A, B, C.
l_a, l_b, l_c là độ dài các đường phân giác trong của tam giác ΔABC tương ứng xuất phát từ các đỉnh A, B, C.
R bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC
r bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC
S diện tích tam giác ΔABC
P Nửa chu vi ΔABC

I.Bất đẳng thức gữa các cạnh của tam giác

I.1 Tính chất

Tính chất 1

Trong ΔABC tổng hai cạnh bất kì luôn lớn hơn cạnh còn lại:
$AB + AC > BC, AB + BC > AC, AC + BC > AB$.

Tính chất2

ΔABC có $AC > BC$ khi và chỉ khi $\angle ABC > \angle BAC$.

Tính chất3

ΔABC có diện tích $S_{\Delta ABC} \le \frac{1}{2} AB.AC$.

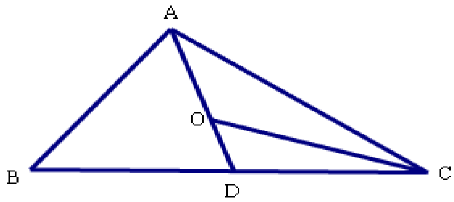
Chứng minh

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.AC \sin \angle BAC \le \frac{1}{2} AB.AC$

Tính chất 4

Với một điểm O bất kì trong ΔABC thì $OA + OC < BA + BC$

Chứng minh



Gọi D là giao điểm của AO và BC.
Ta có: $OA+OC<OA+OD+DC=AD+DC<AB+BD+DC<AB+BC$.

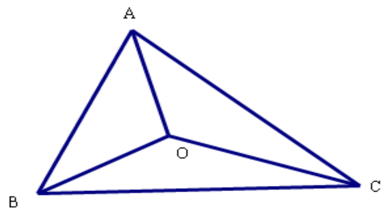
I.2 Các ví dụ và bài tập

<u>Ví dụ 1.1</u>

Gọi O là một điểm nằm trong ΔABC.Chứng minh rằng:

$$p<OA+OB+OC<2p$$

<u>*Chứng minh*</u>



Ta có: $AB<OA+OB$
$BC<OB+OC$
$AC<OA+OC$
nên $AB+BC+CA<2(OA+OB+OC)$
hay $2p<2(OA+OB+OC)\Leftrightarrow p<OA+OB+OC$ (1)
Mặt khác lại có: $OA+OB<CA+CB$
$OB+OC<AB+AC$
$OA+OC<BA+BC$
Cộng các vế ta có: $2(OA+OB+OC)<4p\Leftrightarrow OA+OB+OC<2p$ (2)
Từ (1) và (2) ta được điều phải chứng minh.

<u>Ví dụ 1.2</u>

Cho ΔABC có a,b,c là độ dài tương ứng các cạnh BC,CA,AB. Chứng minh rằng:

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc$$

<u>Chứng minh</u>

Với p là nửa chu vi ΔABC.
Ta có: $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=8(p-a)(p-b)(p-c)$.
Đặt $x=p-a, y=p-b, z=p-c$ ta có: $abc=(x+y)(y+z)(z+x)$.Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:
$8xyz\le(x+y)(y+z)(z+x)$ (Dễ dàng chứng minh theo Bất đẳng thức AM-GM)

<u>Ví dụ 1.3</u>

Cho ΔABC có a,b,c là độ dài tương ứng các cạnh BC,CA,AB. Chứng minh rằng:

$$3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2 \le 4(ab+bc+ca)$$

<u>Chứng minh</u>

Dựa vào bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$a^2+b^2 \ge 2ab$, $c^2+b^2 \ge 2cb, a^2+c^2 \ge 2ac$

Cộng các bất đẳng thức trên ta có:

$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$ (1)

Bây giờ ta chứng minh $(a+b+c)^2 \le 4(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \le 4(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca) \le 0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \le 2(ab+bc+ca)$. (2)

Thật vậy do a,b,c là độ dài các cạnh tam giác nên ta có:

$a < b+c \Leftrightarrow a^2 < a(b+c)$

Tương tự $b^2 < b(a+c)$, $c^2 < c(b+a)$

Cộng các bất đẳng thức ta có: $a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca)$ vậy (2) đúng.

Từ (1) và (2) ta được điều phải chứng minh.

<u>**Ví dụ 1.4**</u>

Cho ΔABC có a,b,c là độ dài tương ứng các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$$\frac{3}{2} \le \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} < 2$$

<u>Chứng minh</u>

$\frac{3}{2} \le \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ (Đây là bất đẳng thức Nebit đã biết)

Bây giờ ta chứng minh $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} < 2$

Thật vậy do a,b,c là độ dài các cạnh tam giác nên ta có:

$a < b+c \Leftrightarrow a+b+c < 2(b+c) \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{2} < b+c \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}$

Tương tự ta có: $\frac{b}{c+a} < \frac{2b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c}$

Cộng các bất đẳng thức trên ta có: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} < 2$.

<u>**Ví dụ 1.5**</u>

Cho ΔABC có a,b,c là độ dài tương ứng các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \le 3abc$$

<u>Chứng minh</u>

Ta viết lại bất đẳng thức như sau:

$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)-2abc \le abc$

$\Leftrightarrow (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \le abc$ (Đây chính là bất đẳng thức 1.2)

Ví dụ 1.6

Cho ΔABC có a,b,c là độ dài tương ứng các cạnh BC,CA,AB. Chứng minh rằng:

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$$

Chứng minh

Đặt $a=y+z, b=z+x, c=x+y$. Bất đẳng thức đã cho trở thành:

$$2(xy^3+yz^3+zx^3)-2(x^2yz+xy^2z+xyz^2)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow xy^3+yz^3+zx^3\ge x^2yz+xy^2z+xyz^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\ge x+y+z$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy_schwarz, ta có:

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\ge \frac{(x+y+z)^2}{x+y+z}=x+y+z.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Ví dụ 1.7

Cho ΔABC nhọn có a,b,c là độ dài tương ứng các cạnh BC,CA,AB. Chứng minh rằng:

a, $(p-a)(p-b)<ab$

b, $(p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)\le \dfrac{ab+bc+ca}{4}$

Chứng minh

a, $(p-a)(p-b)<ab$

$$\Leftrightarrow p^2-p(a+b)<0 \Leftrightarrow p<a+b \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{2}<a+b$$

$a+b+c<2a+2b \Leftrightarrow c<a+b$ (Luôn đúng do a,b,c là các cạnh tam giác)

b, Đặt $a=y+z, b=z+x, c=x+y$. Bất đẳng thức đã cho trở thành:

$$4(xy+yz+zx)\le (y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)+(x+y)(y+z)$$

$$\Leftrightarrow xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2.$$

Thật vậy, ta có:

$$x^2+y^2\ge 2xy, y^2+z^2\ge 2yz, z^2+x^2\ge 2zx$$

Cộng các bất đẳng thức trên, ta được $xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2$.

Ví dụ 1.8

Cho ΔABC nhọn có a,b,c là độ dài tương ứng các cạnh BC,CA,AB. Chứng minh rằng:

$$\frac{\cos^3 A}{a}+\frac{\cos^3 B}{b}+\frac{\cos^3 C}{c}<\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

Chứng minh

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Áp dụng định lí hàm số Sin, ta có:

$$\sum_{cyc}(b^2+c^2-a^2)\sin^2 A=\sum_{cyc}\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{4R^2}$$

$$=\frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}{4R^2}=\frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{4R^2}>0$$

Do đó $\sum_{cyc}(b^2+c^2-a^2)\cos^2 A=\sum_{cyc}(b^2+c^2-a^2)(1-\sin^2 A)$

$$<\sum_{cyc}(b^2+c^2-a^2)=a^2+b^2+c^2$$

Áp dụng định lí hàm số Cosin, ta có:

$\sum_{cyc}(b^2+c^2-a^2)\cos^2 A<a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow \sum_{cyc}2bc\cos^3 A<a^2+b^2+c^2$ (*)

Chia cả hai vế của (*) cho $2abc$ ta được điều phải chứng minh.

Cách 2

$$\sum_{cyc}\frac{\cos^3 A}{a}<\sum_{cyc}\frac{\cos A}{a}=\sum_{cyc}\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

Ví dụ 1.9

Cho ΔABC nhọn có a,b,c là độ dài tương ứng các cạnh BC,CA,AB và p là nửa chu vi ΔABC. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc}(a+b)\sqrt{ab(p-a)(p-b)}\le 3abc$$

Chứng minh

Ta có: $abc^2-(a+b)^2(p-a)(p-b)=abc^2-(a+b)^2\left(\frac{c^2-(a-b)^2}{4}\right)$

$$=\frac{(4ab-(a+b)^2)c^2+(a+b)^2(a-b)^2}{4}$$

$$=\frac{(a-b)^2\left[(a+b)^2-c^2\right]}{4}\ge 0$$

Do đó $abc^2-(a+b)^2(p-a)(p-b)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a+b)^2(p-a)(p-b)\le abc^2 \Leftrightarrow (a+b)^2ab(p-a)(p-b)\le a^2b^2c^2$

$\Leftrightarrow (a+b)\sqrt{ab(p-a)(p-b)}\le abc$

$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a+b)\sqrt{ab(p-a)(p-b)}\le \sum_{cyc}abc=3abc$

Ví dụ 1.10

Cho ΔABC có a,b,c là độ dài tương ứng các cạnh BC,CA,AB. Chứng minh rằng:

$$(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)\le a^2b^2c^2$$

Chứng minh

Áp dụng định lí hàm số Cosin, ta có:

$b^2+c^2-a^2=2bc.\cos A$, $c^2+a^2-b^2=2ca.\cos B$, $a^2+b^2-c^2=2ab.\cos C$

Do đó $(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)\le a^2b^2c^2$

$\Leftrightarrow 8a^2b^2c^2\cos A\cos B\cos C\le a^2b^2c^2$

$\Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$ (Đây là bất đẳng thức cơ bản trong tam giác dễ dàng chứng minh)

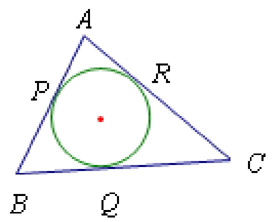
<u>Ví dụ 1.11</u>

Cho ΔABC .Giả sử đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC,CA lần lượt tại các điểm P, Q, R.

Chứng minh rằng:

$$\frac{BC}{PQ}+\frac{CA}{QR}+\frac{AB}{RP}\ge 6$$

<u>Chứng minh</u>



Ta có: $PQ = 2(p-b)\sin\frac{B}{2} = 2(p-b)\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}$,

$$QR = 2(p-c)\sin\frac{C}{2} = 2(p-c)\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} ,$$

$$RP = 2(p-a)\sin\frac{A}{2} = 2(p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} ,$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{BC}{PQ}+\frac{CA}{QR}+\frac{AB}{RP}\ge 3.\sqrt[3]{\frac{BC.CA.AB}{PQ.QR.RP}} = 3.\sqrt[3]{\frac{(abc)^2}{8\left[(p-a)(p-b)(p-c)\right]^2}}$$

Ta chỉ cần chứng minh $abc \ge 8(p-a)(p-b)(p-c)$

$$\Leftrightarrow (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc \ (*)$$

(*) chính là bất đẳng thức của ví dụ 1.2 đã được chứng minh.

Vậy ta có: $\frac{BC}{PQ}+\frac{CA}{QR}+\frac{AB}{RP}\ge 3.\sqrt[3]{8} = 6$.

<u>Ví dụ 1.12</u>

Cho ΔABC nhọn có a,b,c là độ dài tương ứng các cạnh BC,CA,AB và p là nửa chu vi ΔABC. Chứng minh rằng:

$$(p-a)^b(p-b)^c(p-c)^a \le \left(\frac{a}{2}\right)^a\left(\frac{b}{2}\right)^b\left(\frac{c}{2}\right)^c$$

<u>Chứng minh</u>

Áp dụng bất đẳng thức AM_GM suy rộng, ta có:

$$\left(\frac{p-a}{b}\right)^{b}\left(\frac{p-b}{c}\right)^{c}\left(\frac{p-c}{a}\right)^{a} \le \left(\frac{\frac{p-a}{b}b+\frac{p-b}{c}c+\frac{p-c}{a}a}{a+b+c}\right)^{a+b+c} = \frac{1}{2^{a+b+c}}$$

$$\Leftrightarrow (p-a)^{b}(p-b)^{c}(p-c)^{a} \le \left(\frac{a}{2}\right)^{a}\left(\frac{b}{2}\right)^{b}\left(\frac{c}{2}\right)^{c}$$

II.Bất đẳng thức giữa diện tích và các yếu tố khác của tam giác.

Ví dụ 2.1

Chứng minh rằng trong ΔABC, ta luôn có:

$$\frac{S}{r^2} \ge 3\sqrt{3}$$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \ge \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \le \frac{p}{3} \Leftrightarrow (p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{p^3}{27}$$

$$\Leftrightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{p^4}{27} \Leftrightarrow S^2 \le \frac{p^4}{27}$$ (theo công thức Heron)

Mặt khác ta có: $S = pr$ nên $p = \frac{S}{r}$.

Vậy ta có: $S^2 \le \frac{p^4}{27} \Leftrightarrow S^2 \le \frac{S^4}{27r^4} \Leftrightarrow \frac{S^2}{r^4} \ge 27 \Leftrightarrow \frac{S}{r^2} \ge 3\sqrt{3}$.

Ví dụ 2.2

Cho ΔABC và M là một điểm thuộc miền trong của ΔABC .Gọi d_a, d_b, d_c là khoảng cách từ M đến các cạnh của tam giác ABC. S là diện tích ΔABC và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Chứng minh rằng:

$$2S\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{R}\right) \ge d_a + d_b + d_c$$

Chứng minh

Không mất tổng quát giả sử $a \le b \le c$

Ta có: $S = S_{\Delta MAB} + S_{\Delta MAC} + S_{\Delta MBC}$

$$\Leftrightarrow 2S = ad_a + bd_b + cd_c \ge a(d_a + d_b + d_c)$$

$\Leftrightarrow \frac{2S}{a} \ge d_a + d_b + d_c$. Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$2S\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{R}\right) \ge 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{R} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{1}{R}$$

Áp dụng định lí hàm số Sin, ta có:

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{1}{2R\sin B}+\frac{1}{2R\sin C} \ge \frac{1}{2R}+\frac{1}{2R} = \frac{1}{R}$$

Vậy $\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{1}{R}$ nên bất đẳng thức đã cho được chứng minh.